

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI**

**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 - 2024**

Môn thi: **TOÁN (chuyên Tin)**

Thời gian làm bài: **150 phút**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x + 2 = (5 - x)\sqrt{3x - 2}$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + 3xy = 9 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$$

Câu II (2,0 điểm)

1) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh số $A = 2^{p^2+2} - 8$ chia hết cho 21.

2) Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $x^3 - y^3 = 2(x - y)^2 + 17$

Câu III (2,0 điểm)

1) Cho đa thức $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2022x + 2023$. Chứng minh $f(x)$ không có nghiệm hữu tỉ.

2) Với các số thực a, b và c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1) = (a-1)(b-1)(c-1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |a| + |b| + |c|$.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt A và B $(R < R' < OO')$. Gọi PQ là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn (O) và (O') với $P \in (O), Q \in (O')$. $PQ \cap OO' = S$. Qua S kẻ 1 đường thẳng cắt (O) tại 2 điểm E, F và cắt (O') tại 2 điểm G, H sao cho $SE < SF < SG < SH$.

1) Chứng minh rằng $OE \perp O'G$.

2) Chứng minh $SA^2 = SP \cdot SQ$.

3) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt OO' tại M. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O') cắt OO' tại N. $ME \cap AB = I$. Chứng minh $\frac{EA^2}{EB^2} = \frac{IA}{IB}$ và N, I, H thẳng hàng.

Câu V (1,0 điểm)

Trên bàn có hai túi kẹo: túi thứ nhất có 18 viên kẹo, túi thứ hai có 21 viên kẹo. An và Bình cùng chơi 1 trò chơi như sau: mỗi lượt chơi, 1 bạn sẽ lấy đi 1 viên kẹo từ 1 túi bất kì hoặc là mỗi túi lấy đi 1 viên kẹo. 2 bạn luân phiên thực hiện lượt chơi của mình. Người đầu tiên không thực hiện được lượt chơi của mình là người thua cuộc, người còn lại là người thắng cuộc. Nếu An là người lấy kẹo trước, hãy chỉ ra chiến thuật chơi của An để An là người thắng cuộc.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

2. PHẦN LỜI GIẢI

Câu I (2,0 điểm)

$$1) 2x + 2 = (5 - x)\sqrt{3x - 2} \quad (\text{ĐKXĐ: } x \geq \frac{2}{3})$$

$$\Rightarrow (2x + 2)^2 = (5 - x)^2 (3x - 2)$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = (x^2 - 10x + 25)(3x - 2)$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = (x^2 - 10x + 25)(3x - 2)$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 3x^3 - 32x^2 + 95x - 50$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 36x^2 + 87x - 54 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 9)(x - 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x \in \{1; 2; 9\}$$

Thử lại thu được: $x \in \{1; 2\}$. Vậy $x \in \{1; 2\}$

$$2) \begin{cases} x + y + 3xy = 9 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x + y = a; xy = b \quad (a^2 \geq 4b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 3b = 9(1) \\ a^3 - 3ab = 9(2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow a = 9 - 3b \Rightarrow (9 - 3b)^3 - 3(9 - 3b)b = 9$$

$$\Rightarrow -27b^3 + 252b^2 - 756b + 729 = 9 \Rightarrow -27b^3 + 252b^2 - 756b + 720 = 0$$

$$\Rightarrow b \in \left\{2; 4; \frac{10}{3}\right\}$$

$$\text{TH1: } b = 2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow (x, y) \in \{(1, 2); (2, 1)\}$$

$$\text{TH2: } b = 4 \Rightarrow a = -3 \text{ (loại do } a^2 \geq 4b \text{.)}$$

$$\text{TH3: } b = \frac{10}{3} \Rightarrow a = -1 \text{ (loại do } a^2 \geq 4b \text{)}$$

Từ các trường hợp trên $\Rightarrow (x, y) \in \{(1, 2); (2, 1)\}$ (Thử lại thoả mãn)

Vậy $(x, y) \in \{(1, 2); (2, 1)\}$

Câu II (2,0 điểm)

1) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ nên $p^2 + 2$ là số lẻ $\Rightarrow 2^{p^2+2} \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 2^{p^2+2} - 8 : 3(1)$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 + 2 : 3 \Rightarrow 2^{p^2+2} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{p^2+2} - 8 : 7(2)$.

Mà $(3, 7) = 1(3)$. Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow 2^{p^2+2} - 8 : 21$ (ĐPCM).

2) $x^3 - y^3 = 2(x - y)^2 + 17$.

Đặt $x - y = a, xy = b (a^2 \geq -4b)$.

Vì $2(x - y)^2 + 17 > 0 \Rightarrow x^3 - y^3 > 0 \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow a > 0$.

Ta có: $x^3 - y^3 = 2(x - y)^2 + 17 \Rightarrow a^3 + 3ab = 2a^2 + 17 \Rightarrow 17 : a \Rightarrow a \in \{1, 17\}$ (do $a > 0$)

TH1: $a = 1 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow (x, y) \in \{(3, 2); (-2, -3)\}$ (thử lại thỏa mãn)

TH2: $a = 17 \Rightarrow b = \frac{-254}{3}$ (loại)

Vậy $(x, y) \in \{(3, 2); (-2, -3)\}$

Câu III (2,0 điểm)

1) Giả sử đa thức $f(x)$ có nghiệm hữu tỉ.

Gọi nghiệm của đa thức $f(x)$ là $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, (a, b) = 1, b \neq 0$).

Khi đó: $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2022\frac{a}{b} + 2023 = 0$.

$$\Rightarrow a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2022ab^3 + 2023b^4 = 0.$$

$$\Rightarrow a^4 : b.$$

Mà $(a, b) = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2022a + 2023 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 2023 \vdots a \end{cases}$$

$$\Rightarrow a \in \{-1; -2023; -7; -17; -289; -119\}$$

Thử các giá trị $a \in \{-1; -2023; -7; -17; -289; -119\}$ vào biểu thức $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2022a + 2023$ ta thấy không có một giá trị nào của a để $a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2022a + 2023 = 0$. Như vậy không tồn tại các số nguyên a, b thỏa mãn đề bài $\Rightarrow$ Giả sử trên sai. Từ đây ta có điều phải CM.

2) Từ giả thiết ta suy ra $ab + bc + ac = -1$, có $A = |a| + |b| + |c|$, xét

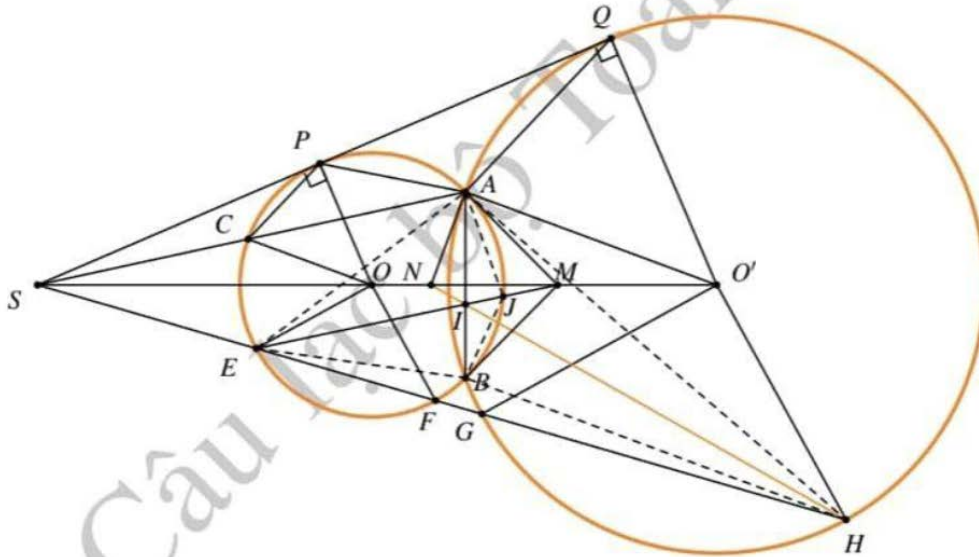
$A^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2|ab| + 2|bc| + 2|ac|$. Theo bất đẳng thức giá trị tuyệt đối, ta có:

$$A^2 = (a + b + c)^2 + 2(|ab| + |bc| + |ac|) + 2 \geq 0 + 2|ab + bc + ac| + 2 = 4$$

Từ đây kết hợp $A \geq 0 \Rightarrow A \geq 2$. Dấu bằng xảy ra nhiều trường hợp, chẳng hạn $(a, b, c) = (0, 1, -1)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2.

Câu IV (3,0 điểm)



1) Ta thấy $OP \parallel O'Q$ (do cùng vuông góc với PQ) $\Rightarrow \frac{SP}{SQ} = \frac{R}{R'}$

Kẻ $O'G' \parallel OE$ (G' thuộc SE) $\Rightarrow \frac{OE}{O'G'} = \frac{SO}{SO'} = \frac{R}{R'} \Rightarrow O'G' = R' \Rightarrow G' \text{ thuộc } (O')$. Lại có: $\widehat{OEF} + \widehat{O'HG} < 180^\circ$ nên $O'H$ không song song với OE . Do đó, G' trùng $G \Rightarrow OE \parallel O'G$ (ĐPCM)

2) Gọi $SA \cap (O') = C, A$. Tương tự phần a ta cũng chứng minh được $OC \parallel AO'$. Theo định lý Thales: $\frac{SC}{SA} = \frac{SO}{SO'} = \frac{SP}{SQ} \Rightarrow PC \parallel AQ \Rightarrow \widehat{SAP} = \widehat{SPC} = \widehat{SQA} \Rightarrow \Delta SAP \sim \Delta SQA \Rightarrow \frac{SA}{SQ} = \frac{SP}{SA}$

$$\Rightarrow SA^2 = SP \cdot SQ \text{ (ĐPCM)}$$

3, gọi $ME \cap (O) = \{J, E\}$. Vì tính đối xứng nên ta có MB cũng là tiếp tuyến của (O), ta có $\Delta MJA \sim \Delta MAE(g, g)$ và $\Delta MJB \sim \Delta MBE(g, g)$ nên ta được

$$\frac{JA}{EA} = \frac{MJ}{MA} = \frac{MJ}{MB} = \frac{JB}{EB}$$

Từ đó ta thu được $\frac{EB}{EA} = \frac{JB}{JA}$ từ đó để ý rằng $\Delta IAE \sim \Delta IJB$ và $\Delta IBE \sim \Delta IJA$ nên ta được

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IA}{IE} \cdot \frac{IE}{IB} = \frac{JA}{EB} \cdot \frac{EA}{JB} = \frac{EA}{EB} \cdot \frac{JA}{JB} = \frac{EA^2}{EB^2}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$. Thật vậy, ta có $SP^2 = SE \cdot SF$ và $SQ^2 = SG \cdot SH$.

Do đó $SB^2 = SA^4 = SP^2 \cdot SQ^2 = SE \cdot SF \cdot SG \cdot SH$. Mặt khác, từ câu a ta sẽ có $\frac{SE}{SF} = \frac{SG}{SH}$ hay $SE \cdot SH = SG \cdot SF$.

Như vậy, ta được $SA^2 = SB^2 = (SE \cdot SH)$ hay $SA^2 = SB^2 = SE \cdot SH$. Từ đó ta thu được $\Delta SEA \sim \Delta SAH$ (c.g.c) và ΔSEB và ΔSBH (c.g.c). Do vậy,

$$\frac{EA}{HA} = \frac{SE}{SA} = \frac{SE}{SB} = \frac{EB}{HB}.$$

Nói cách khác, ta thu được $\frac{EA}{EB} = \frac{HA}{HB}$. Đến đây, đặt $HN \cdot AB = I'$. Chứng minh tương tự

như ý trên ta cũng được $\frac{I'A}{I'B} = \frac{HA^2}{HB^2}$. Từ đó suy ra $\frac{IA}{IB} = \frac{I'A}{I'B}$ và dẫn đến $I \equiv I'$. Như vậy, N, I, H thẳng hàng.

Câu V (1,0 điểm) Đầu tiên An sẽ bốc 1 viên từ túi thứ hai, hai túi lúc này lần lượt có 18 và 20 viên kẹo. Tại lượt tiếp theo, chiến thuật An sẽ là nếu Bình bốc như thế nào thì An sẽ bốc y hệt như vậy. Khi đó ta thấy Bình sẽ phải bắt đầu bốc với hai túi đều có số chẵn viên kẹo, hay nói riêng, là còn kẹo. Như vậy khi đến lượt An thì An hoàn toàn có thể sao chép cách bốc của Bình, do cứ túi nào mà Bình bốc thì phải còn kẹo. Khi đó đến lượt Bình thì Bình lại phải bốc với hai túi còn số chẵn viên kẹo, và An vẫn có thể lặp lại chiến thuật như trên. Trong quá trình bốc này, ta thấy An luôn có thể bốc kẹo, cho nên An không thể là người thua cuộc, nói cách khác, An sẽ là người thắng cuộc với chiến thuật này.