

# HSG T9 Tỉnh Sóc Trăng 21 22

**Bài 1. (4,0 điểm)** Cho biểu thức  $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) - 1$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P - \sqrt{x}$  nhận giá trị nguyên.

**Bài 2. (4,0 điểm)**

a) Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{n^2 + 3n + 2} = \frac{2023}{2025}$ .

b) Giá bán lẻ điện sinh hoạt được tập đoàn điện lực Việt Nam chia theo thang giá 6 bậc như sau:

Bậc 1: Cho kWh từ 0 đến 50.

Bậc 2: Cho kWh từ 51 đến 100, giá mỗi kWh cao hơn bậc 1 là 56 đồng.

Bậc 3: Cho kWh từ 101 đến 200, giá mỗi kWh cao hơn bậc 2 là 280 đồng.

Bậc 4: Cho kWh từ 201 đến 300, giá mỗi kWh cao hơn bậc 3 là 522 đồng.

Bậc 5: Cho kWh từ 301 đến 400, giá mỗi kWh cao hơn bậc 4 là 298 đồng.

Bậc 6: Cho kWh từ 401 trở lên, giá mỗi kWh cao hơn bậc 5 là 93 đồng.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng trên tổng số tiền điện sử dụng hàng tháng.

Tháng 01 năm 2022, nhà bác Nam sử dụng hết 375 kWh và phải trả 921 965 đồng.

Hãy tính giá bán mỗi kWh điện ở từng bậc.

**Bài 3. (4,0 điểm)**

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x; y$ , thỏa mãn:  $x^2 - 2022xy + 2021y^2 = 2021$ .

b) Chứng minh rằng nếu số tự nhiên  $a$  không chia hết cho 5 thì  $a^8 + 3a^4 - 4$  chia hết cho 100.

**Bài 4. (4,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$  và trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên các cạnh  $AB, AC$ .

a) Chứng minh  $HB.HC = HJ.IB + HI.JC$ .

b) Biết rằng trung tuyến  $AM$  dài hơn đường cao  $AH$  là 2 cm và chu vi tam giác  $ABC$  bằng 24 dm. Hãy tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài 5. (4,0 điểm)** Cho đường tròn  $(O)$  và dây  $BC$  cố định. Điểm  $A$  chuyển động trên cung lớn  $BC$  sao cho  $ABC$  là tam giác nhọn. Các đường cao  $BD$  và  $CE$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại  $H$ .

a) Chứng minh rằng  $DE$  có độ dài không đổi.

b) Gọi  $M$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $AH$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $AH$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $MH$  và  $AB$ ,  $K$  là giao điểm của  $NH$  và  $AC$ . Tìm vị trí của điểm  $A$  để độ dài  $IK$  nhỏ nhất.

---Hết---

## HƯỚNG DẪN GIẢI

**Bài 1. (4,0 điểm)** Cho biểu thức  $P = \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) - 1$ .

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

b) Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P - \sqrt{x}$  nhận giá trị nguyên.

### Lời giải

a) Rút gọn biểu thức  $P$ .

Điều kiện để  $P$  có nghĩa là  $x \geq 0$  và  $x \neq 1$

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1}\right) - 1 \\ &= \left(\frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}\right) - 1 = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1} : \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} - 1 \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1} : \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} - 1 = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{(x + \sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

b) Tìm các giá trị nguyên của  $x$  để biểu thức  $P - \sqrt{x}$  nhận giá trị nguyên.

$$P - \sqrt{x} = \frac{x+2}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-1}$$

Ta thấy với  $\sqrt{x}$  là số vô tỉ thì  $\sqrt{x}-1$  là số vô tỉ suy ra  $P - \sqrt{x}$  là số vô tỉ (loại)

Với  $\sqrt{x}$  là số nguyên thì  $\sqrt{x}-1$  là số nguyên. Khi đó,  $P - \sqrt{x}$  nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi  $\sqrt{x}-1$  là ước của 3 hay  $\sqrt{x}-1 = \pm 1$  hoặc  $\sqrt{x}-1 = \pm 3$

Suy ra  $x = 0$  hoặc  $x = 4$  hoặc  $x = 16$ .

**Bài 2. (4,0 điểm)**

a) Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{n^2 + 3n + 2} = \frac{2023}{2025}$ .

b) Giá bán lẻ điện sinh hoạt được tập đoàn điện lực Việt Nam chia theo thang giá 6 bậc như sau:

Bậc 1: Cho kWh từ 0 đến 50.

Bậc 2: Cho kWh từ 51 đến 100, giá mỗi kWh cao hơn bậc 1 là 56 đồng.

Bậc 3: Cho kWh từ 101 đến 200, giá mỗi kWh cao hơn bậc 2 là 280 đồng.

Bậc 4: Cho kWh từ 201 đến 300, giá mỗi kWh cao hơn bậc 3 là 522 đồng.

Bậc 5: Cho kWh từ 301 đến 400, giá mỗi kWh cao hơn bậc 4 là 298 đồng.

Bậc 6: Cho kWh từ 401 trở lên, giá mỗi kWh cao hơn bậc 5 là 93 đồng.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng trên tổng số tiền điện sử dụng hàng tháng.

Tháng 01 năm 2022, nhà bác Nam sử dụng hết 375 kWh và phải trả 921 965 đồng.

Hãy tính giá bán mỗi kWh điện ở từng bậc.

### Lời giải

a) Tìm số tự nhiên  $n$  thỏa mãn:  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{n^2 + 3n + 2} = \frac{2023}{2025}$ .

**Giải:**

Ta có  $n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

$$\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{2}{n^2 + 3n + 2} = \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \dots + \frac{2}{n^2 + 3n + 2}$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n}{n+2}$$

$$\text{Khi đó: } \frac{n}{n+2} = \frac{2023}{2025} \Rightarrow n = 2023$$

**b)** Giá bán lẻ điện sinh hoạt được tập đoàn điện lực Việt Nam chia theo thang giá 6 bậc như sau:

Bậc 1: Cho kWh từ 0 đến 50.

Bậc 2: Cho kWh từ 51 đến 100, giá mỗi kWh cao hơn bậc 1 là 56 đồng.

Bậc 3: Cho kWh từ 101 đến 200, giá mỗi kWh cao hơn bậc 2 là 280 đồng.

Bậc 4: Cho kWh từ 201 đến 300, giá mỗi kWh cao hơn bậc 3 là 522 đồng.

Bậc 5: Cho kWh từ 301 đến 400, giá mỗi kWh cao hơn bậc 4 là 298 đồng.

Bậc 6: Cho kWh từ 401 trở lên, giá mỗi kWh cao hơn bậc 5 là 93 đồng.

Ngoài ra, người sử dụng còn phải trả thêm 10% thuế giá trị gia tăng trên tổng số tiền điện sử dụng hàng tháng.

Tháng 01 năm 2022, nhà bác Nam sử dụng hết 375 kWh và phải trả 921 965 đồng.

Hãy tính giá bán mỗi kWh điện ở từng bậc.

**Giải:**

Gọi  $x$  (đồng) là giá bán mỗi kWh điện ở bậc 1 ( $x > 0$ ). Khi đó:

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 2 là:  $x + 56$

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 3 là:  $x + 56 + 280 = x + 336$

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 4 là:  $x + 336 + 522 = x + 858$

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 5 là:  $x + 858 + 298 = x + 1156$

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 6 là:  $x + 1156 + 93 = x + 1249$

Số tiền điện nhà Bác Nam phải trả tháng 1 năm 2022 nếu không tính thuế giá trị gia tăng theo thang bậc là:

$$T = 50x + 50(x + 56) + 100(x + 336) + 100(x + 858) + 75(x + 1156) = 375x + 208900$$

$$\text{Mặt khác: } (100\% + 10\%)T = 921965 \Rightarrow T = 838150 \text{ (đồng)}$$

$$\text{Ta có phương trình } 375x + 208900 = 838150 \Leftrightarrow x = 1678$$

Vậy:

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 1 là: 1678 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 2 là: 1734 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 3 là: 2014 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 4 là: 2536 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 5 là: 2834 đồng

+ Giá bán mỗi kWh điện ở bậc 6 là: 2927 đồng

**Bài 3. (4,0 điểm)**

**a)** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x; y$ , thỏa mãn:  $x^2 - 2022xy + 2021y^2 = 2021$ .

**b)** Chứng minh rằng nếu số tự nhiên  $a$  không chia hết cho 5 thì  $a^8 + 3a^4 - 4$  chia hết cho 100.

**Lời giải**

**a)** Tìm tất cả các cặp số nguyên  $x; y$ , thỏa mãn:  $x^2 - 2022xy + 2021y^2 = 2021$ .

Ta có:  $x^2 - 2022xy + 2021y^2 = 2021$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2022xy + 1022121y^2 - 1022121y^2 = 2021$$

$$\Leftrightarrow (x - 1011y)^2 - (1010y)^2 = 2021$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x - 2021y) = 2021$$

Do  $x$  nguyên,  $y$  nguyên nên  $x - y$  nguyên và  $x - 2021y$  nguyên

$$\text{Mà } 2021 = 1.2021 = 43.47 = (-1).(-2021) = (-43).(-47)$$

Do đó có các khả năng sau:

$$\oplus \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2021y = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} x - y = 2021 \\ x - 2021y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} x - y = -1 \\ x - 2021y = -2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} x - y = -2021 \\ x - 2021y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2022 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\oplus \begin{cases} x - y = 43 \\ x - 2021y = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21714}{505} \\ y = \frac{-1}{505} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\oplus \begin{cases} x - y = 47 \\ x - 2021y = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23736}{505} \\ y = \frac{1}{505} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\oplus \begin{cases} x - y = -43 \\ x - 2021y = -47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-21714}{505} \\ y = \frac{1}{505} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\oplus \begin{cases} x - y = 43 \\ x - 2021y = 47 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-23736}{505} \\ y = \frac{-1}{505} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là:  $(0; -1); (0; 1); (2022; 1); (-2022; -1)$

**b)** Chứng minh rằng nếu số tự nhiên  $a$  không chia hết cho 5 thì  $a^8 + 3a^4 - 4$  chia hết cho 100.

$$\text{Ta có: } M = a^8 + 3a^4 - 4 = a^8 + 4a^4 - a^4 - 4 = (a^4 - 1)(a^4 + 4)$$

- Nếu  $a$  là số chẵn thì  $(a^4 + 4):4$  nên  $M:4$

- Nếu  $a$  là số lẻ thì  $(a^2 - 1):2$  và  $(a^2 + 1):2$  nên  $M:4$

Suy ra  $M:4$  với mọi  $a$

- Vì  $a \not\equiv 5$  nên  $a = 5k \pm 1$  hoặc  $a = 5k \pm 2$ , với  $k$  là số tự nhiên khác 0.

⊕ Với  $a = 5k \pm 1$  thì  $(a^2 - 1):5$  và  $(a^4 + 4):5$  nên  $M:25$

⊕ Với  $a = 5k \pm 2$  thì  $(a^2 + 1):5$  và  $(a^4 + 4):5$  nên  $M:25$

Suy ra  $M:25$  với mọi số tự nhiên  $a$  không chia hết cho 5

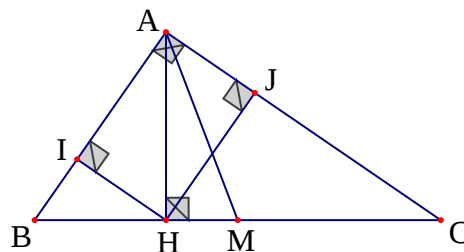
Mà  $BCNN(25, 4) = 100$ . Do đó  $M$  chia hết cho 100

**Bài 4. (4,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , có đường cao  $AH$  và trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên các cạnh  $AB, AC$ .

a) Chứng minh  $HB.HC = HJ.IB + HI.JC$ .

b) Biết rằng trung tuyến  $AM$  dài hơn đường cao  $AH$  là 2 cm và chu vi tam giác  $ABC$  bằng 24 dm. Hãy tính diện tích tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**



a) Chứng minh  $HB.HC = HJ.IB + HI.JC$ .

Ta có tứ giác  $AHJ$  là hình chữ nhật, suy ra

$$IA = HJ; JA = HI$$

$$AH^2 = IJ^2 = HI^2 + HJ^2$$

Mặt khác  $HB.HC = AH^2 = HI^2 + HJ^2$

$$HB.HC = IA.IB + JA.JC$$

$$HB.HC = HJ.IB + HI.JC \text{ (ĐPCM)}$$

b) Biết rằng trung tuyến  $AM$  dài hơn đường cao  $AH$  là 2 cm và chu vi tam giác  $ABC$  bằng 24 dm. Hãy tính diện tích tam giác  $ABC$ .

Gọi  $AM = x$  (cm),  $x > 2$  suy ra  $BC = 2AM = 2x$

Ta có:  $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 4x^2$  (1)

$$AH = AM - 2 = x - 2 \Rightarrow AB.AC = AH.BC = 2x^2 - 4x$$

$$AB + AC + BC = 240 \Rightarrow AB + AC = 240 - BC$$

$$\Rightarrow (AB + AC)^2 = (240 - BC)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 + 2AB.AC = 57600 - 480BC + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 + 2(2x^2 - 4x) = 57600 - 480.2x + 4x^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + AC^2 = -952x + 57600 \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có phương trình } 4x^2 = -952x + 57600 \Leftrightarrow 4x^2 + 952x - 57600 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \text{ (tm)} \\ x = -288 \text{ (l)} \end{cases}$$

Suy ra  $BC = 100$ ,  $AH = 48$

Vậy diện tích tam giác  $ABC$  là  $S = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}.48.100 = 2400 \text{ (cm}^2\text{)}$

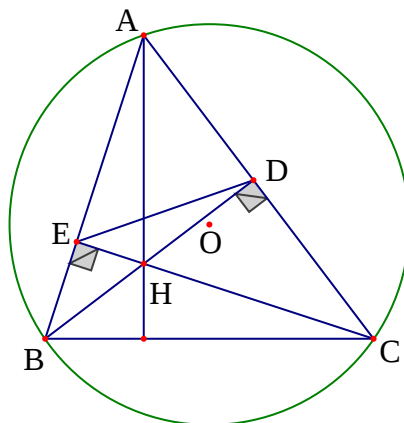
**Bài 5. (4,0 điểm)** Cho đường tròn  $(O)$  và dây  $BC$  cố định. Điểm  $A$  chuyển động trên cung lớn  $BC$  sao cho  $ABC$  là tam giác nhọn. Các đường cao  $BD$  và  $CE$  của tam giác  $ABC$  cắt nhau tại  $H$ .

a) Chứng minh rằng  $DE$  có độ dài không đổi.

b) Gọi  $M$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $AH$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $AH$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $MH$  và  $AB$ ,  $K$  là giao điểm của  $NH$  và  $AC$ . Tìm vị trí của điểm  $A$  để độ dài  $IK$  nhỏ nhất.

**Lời giải**

a) Chứng minh rằng  $DE$  có độ dài không đổi.



Ta có  $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ , suy ra tứ giác  $BEDC$  là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{BCE} = \widehat{BDE}$  (góc nội tiếp cùng chắn cung  $BE$ )

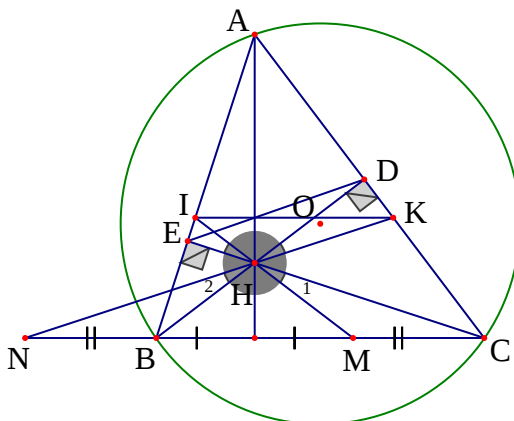
$$\text{Mặt khác } \begin{cases} \widehat{ADE} + \widehat{BDE} = 90^\circ \\ \widehat{ABC} + \widehat{BCE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ADE} \\ \widehat{BDE} = \widehat{BCE} \end{cases}$$

Suy ra  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$  (g-g)

$$\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \cos A \Rightarrow DE = BC \cdot \cos A \text{ (không đổi)}$$

Do đó  $DE$  có độ dài không đổi.

b) Gọi  $M$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $AH$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $AH$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $MH$  và  $AB$ ,  $K$  là giao điểm của  $NH$  và  $AC$ . Tìm vị trí của điểm  $A$  để độ dài  $IK$  nhỏ nhất.



Ta có :  $\widehat{H_1} = \widehat{H_2} \Rightarrow \widehat{EHI} = \widehat{DHK} \Rightarrow \Delta EHI \simeq \Delta DHK$  (g-g)  $\Rightarrow \frac{EH}{DH} = \frac{HI}{HK}$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} \widehat{EHD} = \widehat{EHI} + \widehat{IHD} \\ \widehat{IHK} = \widehat{DHK} + \widehat{IHD} \Rightarrow \widehat{EHD} = \widehat{IHK} \\ \widehat{EHI} = \widehat{DHK} \end{cases}$$

$\Rightarrow \Delta HIK \simeq \Delta HED$  (c-g-c)

$$\Rightarrow \frac{IK}{ED} = \frac{HI}{HE} \geq 1 \Rightarrow IK \geq ED \text{ (không đổi)}$$

$IK$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $IK = ED$

$\Leftrightarrow I$  trùng với  $E$  và  $K$  trùng với  $D$

$\Leftrightarrow A$  là điểm chính giữa của cung lớn  $BC$ .

---Hết---