

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (3,0 điểm) Thực hiện phép tính:

$$P = \left(\sqrt{\frac{2020+x}{2020-x}} + \sqrt{\frac{2020-x}{2020+x}} \right) : \left(\sqrt{\frac{2020+x}{2020-x}} - \sqrt{\frac{2020-x}{2020+x}} \right)$$

Câu 2. (4,5 điểm)

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y = mxy + 5 \\ y^2 - x = mxy + 5 \end{cases}$ với m là tham số

- Giải hệ phương trình với $m = 1$
- Xác định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$, lấy điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN (M, N là các tiếp điểm) và cát tuyến ABC ($AB < AC$). Gọi I là trung điểm của BC , T là giao của NI với (O) ($T \neq N$)

- Chứng minh rằng tam giác AMN đều
- Chứng minh rằng $MT \parallel AC$
- Tiếp tuyến của (O) tại B, C cắt nhau ở K . Chứng minh K, M, N thẳng hàng

Câu 4. (3,0 điểm)

- Tìm cặp $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $x^2 + y^2 + 8x + y - 2xy + 3 = 0$ sao cho y đạt giá trị lớn nhất
- Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$(x^2 - 3)(x^2 - 7)(x^2 - 15)(x^2 - 19) = -351$$

Câu 5. (3,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CD, AD và G là giao điểm của AE và BF

- Chứng minh rằng: $\widehat{FED} = \widehat{FGD}$
- Gọi H là điểm đối xứng với F qua G , I là giao điểm của BD và EF . Đường thẳng qua D , song song với BF cắt HI tại K . Chứng minh rằng K là trực tâm của tam giác GDE

Câu 6. (3,00 điểm) Cho $x > 0, y > 0$ và $xy = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{x^3}{4(y+2)} + \frac{y^3}{4(x+2)}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \frac{2020+x}{2020-x} > 0 \\ \frac{2020-x}{2020+x} > 0 \\ \frac{2020+x}{2020-x} \neq \frac{2020-x}{2020+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 2020 \\ x \neq 0 \end{cases} . \text{ Đặt } \sqrt{\frac{2020+x}{2020-x}} = t, \text{ ta có:}$$

$$P = \left(t + \frac{1}{t}\right) : \left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1} = \left(\frac{2020+x}{2020-x} + 1\right) : \left(\frac{2020+x}{2020-x} - 1\right) \\ = \frac{2020+x+2020-x}{2020-x} : \frac{2020+x-2020+x}{2020-x} = \frac{2020}{x}$$

Câu 2.

a) Với $m=1$ thì hệ phương trình là
$$\begin{cases} x^2 - y = xy + 5 \quad (1) \\ y^2 - x = xy + 5 \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $(x-y)(x+y+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=-x-1 \end{cases}$

*) $x=y \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 - x = x^2 + 5 \Rightarrow x=y=-5$

*) $y=-x-1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 - (-x-1) = x(-x-1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=-2 \\ x=-2 \Rightarrow y=1 \end{cases}$$

Vậy hệ có 3 nghiệm $(-5;-5); (1;-2); (-2;1)$

b) Vì vai trò x, y bình đẳng nên khi hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$(x; y) = (x_0, y_0)$ thì $x_0 = y_0$. Thế vào hệ ta được

$$x_0^2 - x_0 = mx_0^2 + 5 \Leftrightarrow (m-1)x_0^2 + x_0 + 5 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Để (3) có nghiệm duy nhất thì } \begin{cases} m=1 \\ \Delta = 1 - 20(m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m = \frac{21}{20} \end{cases}$$

*) Với $m=1$ theo câu a hệ có 3 nghiệm nên không có nghiệm duy nhất

*) Với $m = \frac{21}{20}$ hệ có dạng
$$\begin{cases} x^2 - y = \frac{21}{20}xy + 5 & (4) \\ y^2 - x = \frac{21}{20}xy + 5 & (5) \end{cases}$$

Lấy (4) trừ (5) ta được: $(x - y)(x + y + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = -x - 1 \end{cases}$

-) $x = y \Rightarrow (4) \Leftrightarrow x^2 - x = \frac{21}{20}x^2 + 5 \Leftrightarrow x^2 + 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = -10$

Suy ra hệ có nghiệm $(-10; -10)$

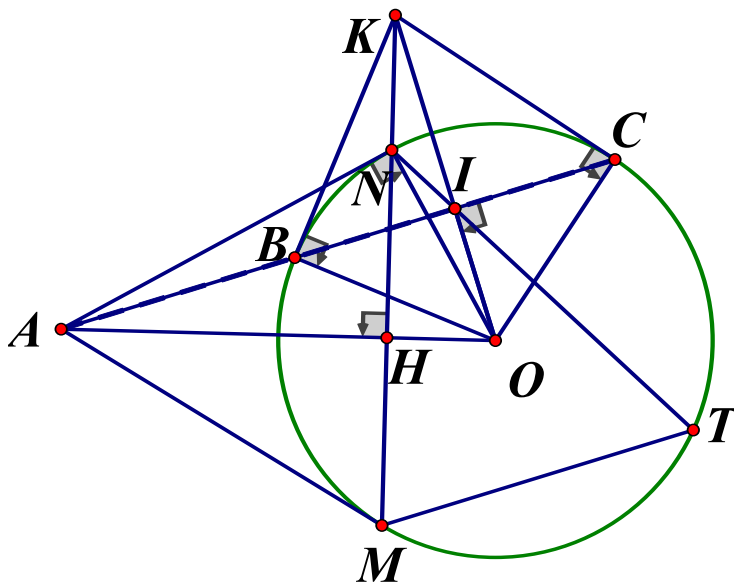
-) Thay $y = -x - 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 - (x - 1) = \frac{21}{20}x(-x - 1) + 5 \Leftrightarrow 41x^2 + 41x - 80 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-41 + 19\sqrt{41}}{82} \\ x = \frac{-41 - 19\sqrt{41}}{82} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-41 - 19\sqrt{41}}{82} \\ y = \frac{-41 + 19\sqrt{41}}{82} \end{cases}$$

Trường hợp $m = \frac{20}{21}$ hệ có 3 nghiệm nên hệ không có nghiệm duy nhất

Vậy không có m nào để hệ có nghiệm duy nhất

Câu 3.



a) Chứng minh $MT \parallel AC$. Tứ giác $ANIO$ nội tiếp (vì $\angle AIO = \angle ANO = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \angle AIN = \angle AON = \frac{1}{2} \widehat{MN}. \text{ Lại có :}$$

$$\widehat{MTN} = \frac{1}{2} \widehat{MN} \Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{MTN} \Rightarrow MT // AC$$

b) Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều

Theo tính chất tiếp tuyến cắt nhau thì $MN \perp AO$

Gọi H là giao điểm của MN và AO

Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác vuông ANO: $OA.OH = ON^2$

$$\Rightarrow OH = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2} \Leftarrow \cos \angle NOH = \frac{OH}{ON} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NOH} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 2\widehat{NAH} = 60^\circ$$

Kết hợp với $AM = AN \Rightarrow \triangle AMN$ đều

c) Chứng minh K, M, N thẳng hàng

Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông ANO, KCO

$$OA.OH = ON^2 = R^2; OI.OK = OC^2 = R^2 \Rightarrow OA.OH = OI.OK$$

$$\Rightarrow \triangle OIA \sim \triangle OHK (c - g - c) \Rightarrow \hat{I} = \angle H = 90^\circ \Rightarrow KH \perp AO$$

Vì $MN \perp AO$ tại H và $KH \perp AO \Rightarrow K, M, N$ thẳng hàng.

Câu 4.

a) Viết phương trình đề theo ẩn x ta được: $x^2 - 2(y - 4)x + y^2 + y + 3 = 0(2)$

Đề tồn tại $(x; y)$ thì (2) phải có nghiệm, nghĩa là :

$$\Delta' = (y - 4)^2 - (y^2 + y + 3) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{13}{9}$$

$$y_{\max} = \frac{13}{9} \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x = \frac{y - 4}{1} = \frac{13}{9} - 4 = \frac{-23}{9}$$

Vậy $(x; y) = \left(-\frac{23}{9}; \frac{13}{9}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

b) Vì -351 là số âm và tích của 4 thừa số $x^2 - 3; x^2 - 7; x^2 - 15; x^2 - 19$ nên trong 4 thừa số đó phải có 1 hoặc 3 thừa số âm

Ta thấy $x^2 - 19 < x^2 - 15 < x^2 - 7 < x^2 - 3$ nên xảy ra 2 trường hợp:

Trường hợp 3 thừa số âm:

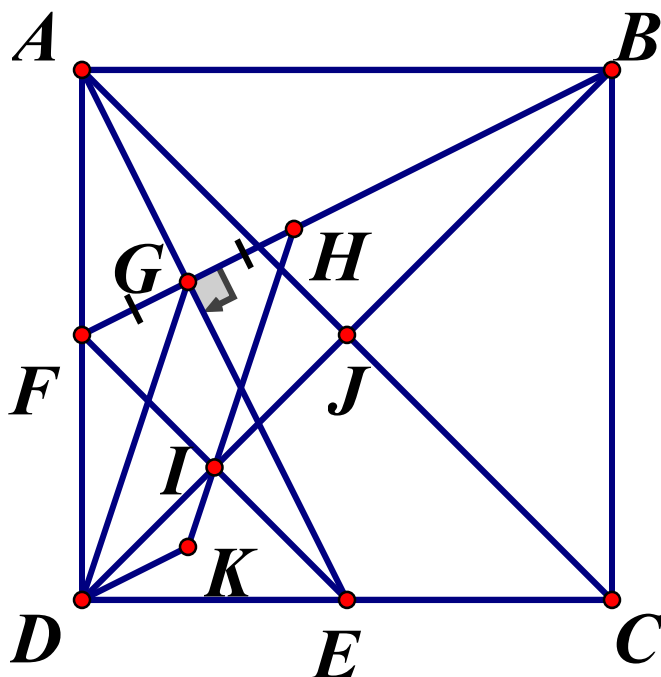
$$x^2 - 7 < 0 < x^2 - 3 \Rightarrow 3 < x^2 < 7 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow VT = -495 \neq -351(ktm)$$

Trường hợp 1 thừa số âm: $x^2 - 19 < 0 < x^2 - 15$

$$\Rightarrow 15 < x^2 < 19 \Rightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4 \Rightarrow VT = -351(tm)$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $x = 4; x = -4$

Câu 5.



$$a) \triangle ADE = \triangle BAF(c.g.c) \Rightarrow \angle FAG = \angle DAE = \angle FBA$$

Xét $\triangle FAG$ và $\triangle FBA$ có: $\angle FAG = \angle FBA$ (cmt); $\angle F$ chung
 $\Rightarrow \triangle FAG \sim \triangle FBA(g.g) \Rightarrow \angle AGF = \angle BAF = 90^\circ$

$DEGF$ có $\angle FGE = \angle FDE = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle FED = \angle FGD$

$$b) \text{ Gọi } J \text{ là tâm hình vuông. Khi đó } DI = \frac{1}{2}DJ = \frac{1}{4}DB \Rightarrow BI = \frac{3}{4}BD(1)$$

Áp dụng hệ thức lượng vào $\triangle AFB$ vuông tại A, đường cao AG ta có:

$$\frac{GH}{GB} = \frac{GF}{GB} = \frac{AF^2}{AB^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{BH}{BG} = \frac{3}{4}(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $HK \parallel DG$ kết hợp với giả thiết $DK \parallel GH(3) \Rightarrow DKHG$ là hình bình hành nên $DK = HG = GF(4)$

Từ (3) và (4) suy ra $DKGF$ cũng là hình bình hành, do đó $GK \parallel FD$

Kết hợp $DK \parallel GH$ và $FB \perp AE$ (do $\angle AGF = 90^\circ$) $\Rightarrow DK \perp GE(5)$

Kết hợp $GK \parallel FD$ và $FD \perp DE$ (do $ABCD$ là hình vuông) nên $GK \perp DE(6)$

Từ (5) và (6) suy ra K là trực tâm của tam giác GDE

Câu 6.

Ta có: $Q = \frac{x^3(x+2) + y^3(y+2)}{4(x+2)(y+2)} = \frac{x^4 + y^4 + 2(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{4[2(x+y) + xy + 4]}$

Và $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$ (2); $x^2 - xy + y^2 \geq xy$ (3)

Dấu "=" trong (2) và (3) xảy ra khi $x = y = 2$ (do $xy = 4$)

Do đó $Q \geq \frac{2x^2y^2 + 2(x+y)xy}{4[2(x+y) + xy + 4]}$,

Cũng do $xy = 4 \Rightarrow Q \geq \frac{32 + 8(x+y)}{4[2(x+y) + 8]} = \frac{x+y+4}{x+y+4} = 1 \Rightarrow Q \geq 1$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 2$

Vậy $\min Q = 1 \Leftrightarrow x = y = 2$