

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán (Chuyên)

Ngày thi: 22/6/2022

Thời gian: 150 phút

Bài 1. (1,0 điểm) Tính giá trị các biểu thức sau

$$A = \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} + \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2}$$

$$B = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}}$$

Bài 2. (1,0 điểm) Giải phương trình :

$$a) x\sqrt{7x-12} = 2x^2 - 7x + 12$$

$$b) \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{2}{4-x^2} + \frac{1}{x^2-2x}$$

Bài 3. (1,5 điểm) Cho Parabol $(P): y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx + 1$

a) Chứng tỏ đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Khi $m = \frac{1}{4}$, vẽ Parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy và tìm tọa độ giao điểm của chúng

Bài 4. (1,5 điểm) Một xí nghiệp chế biến thủy sản dự kiến đóng 3000 hộp tôm xuất khẩu trong một thời gian nhất định. Trong 6 ngày đầu họ thực hiện đúng tiến độ, những ngày sau đó mỗi ngày đóng vượt 10 hộp tôm xuất khẩu nên chẳng những hoàn thành sớm được 1 ngày mà còn vượt mức 60 hộp tôm xuất khẩu nữa. Hỏi theo dự kiến, mỗi ngày xí nghiệp đó đóng bao nhiêu hộp tôm xuất khẩu ?

Bài 5. (1,0 điểm) Cho số $M = 2018 + \sqrt[3]{120 + \sqrt[3]{120 + \dots + \sqrt[3]{120}}$ (trong đó dấu căn bậc ba " $\sqrt[3]{}$ " được viết lặp lại 2022 lần). Chứng minh rằng $2022 < M < 2023$

Bài 6. (1,0 điểm) Tìm các cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn đẳng thức :

$$a^2 + b^2 = a + b + ab$$

Bài 7. (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn đường kính AB , trên nửa đường tròn lấy điểm C cố định (khác A và B). Kẻ CD vuông góc với AB (D thuộc AB). Trên cung BC lấy điểm E bất kỳ (khác C và B), đường thẳng AE cắt CD tại K . Chứng minh rằng :

a) Tứ giác $KDBE$ nội tiếp một đường tròn

b) Chứng minh $AC^2 = AK \cdot AE$

c) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi E thay đổi trên cung BC

ĐÁP ÁN

Bài 1.(1,0 điểm) Tính giá trị các biểu thức sau

$$A = \sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}} + \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} = \sqrt{17 - 4(2 + \sqrt{5})} + |\sqrt{5} - 3|$$

$$= \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + 3 - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1$$

$$\sqrt{2}B = \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} = \sqrt{7} + 1 - (\sqrt{7} - 1) = 2 \Rightarrow B = \sqrt{2}$$

Bài 2. (1,0 điểm) Giải phương trình :

$$a) x\sqrt{7x-12} = 2x^2 - 7x + 12$$

Điều kiện : $x \geq \frac{12}{7}$. Đặt $a = \sqrt{7x-12} (a \geq 0)$, khi đó ta có phương trình :

$$xa = 2x^2 - a^2 \Leftrightarrow (x-a)(2x+a) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ (do } 2x+a > 0 \text{)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{7x-12} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 7x-12 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases} (tm)$$

Vậy $S = \{3; 4\}$

$$b) \frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{2}{4-x^2} + \frac{1}{x^2-2x}$$

Điều kiện : $x \neq 0; x \neq \pm 2$. Phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{x^2-5x+6}{x(x-2)(x+2)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(ktm) \\ x = 3(tm) \end{cases}$$

Vậy $x = 3$

Bài 3. (1,5 điểm) Cho Parabol (P): $y = \frac{3}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx + 1$

c) Chứng tỏ đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$\frac{3}{2}x^2 = 2mx + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4mx - 2 = 0$$

$$\Delta' = 4m^2 + 6 > 0, \forall m$$

Suy ra phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, tức là đường thẳng (d) luôn cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt

d) Khi $m = \frac{1}{4}$, vẽ Parabol (P) và đường thẳng (d) trên cùng một mặt phẳng

tọa độ O_{xy} và tìm tọa độ giao điểm của chúng

Học sinh tự vẽ (P)

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và đường thẳng (d):

$$\frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy tọa độ giao điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$

Bài 4. (1,5 điểm) Một xí nghiệp chế biến thủy sản dự kiến đóng 3000 hộp tôm xuất khẩu trong một thời gian nhất định. Trong 6 ngày đầu họ thực hiện đúng tiến độ, những ngày sau đó mỗi ngày đóng vượt 10 hộp tôm xuất khẩu nên chẳng những hoàn thành sớm được 1 ngày mà còn vượt mức 60 hộp tôm xuất khẩu nữa. Hỏi theo dự kiến, mỗi ngày xí nghiệp đó đóng bao nhiêu hộp tôm xuất khẩu ?

Gọi x (hộp/ngày) là năng suất dự kiến của xí nghiệp ($x \in \mathbb{N}^*$)

Suy ra thời gian dự kiến: $\frac{3000}{x}$ (ngày)

Theo bài ra ta có phương trình :

$$6x + \left(\frac{3000}{x} - 1 - 6\right) \cdot (x + 10) = 3000 + 60 \Leftrightarrow x^2 + 130x + 30000 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 120 (tm) \\ x = -250 (ktm) \end{cases}$$

Vậy dự kiến, mỗi ngày xí nghiệp đó đóng được 120 hộp tôm xuất khẩu

Bài 5. (1,0 điểm) Cho số $M = 2018 + \sqrt[3]{120 + \sqrt[3]{120 + \dots + \sqrt[3]{120}}}$ (trong đó dấu căn bậc ba " $\sqrt[3]{}$ " được viết lặp lại 2022 lần). Chứng minh rằng $2022 < M < 2023$

Đặt $A = \sqrt[3]{120 + \sqrt[3]{120 + \dots + \sqrt[3]{120}}}$

Dễ thấy điều phải chứng minh tương đương với $4 < A < 5$

Ta thấy $A^3 > 120 > 64 = 4^3 \Rightarrow A > 4$ (1)

Ta có nhận xét :

$$A^3 - 120 < A \Rightarrow (A - 5)(A^2 + 5A + 24) < 0 \Leftrightarrow A < 5 \text{ (do } A^2 + 5A + 24 > 0 \forall A > 0) \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 4 < A < 5$ (dpcm)

Bài 6. (1,0 điểm) Tìm các cặp số nguyên $(a; b)$ thỏa mãn đẳng thức :

$$a^2 + b^2 = a + b + ab$$

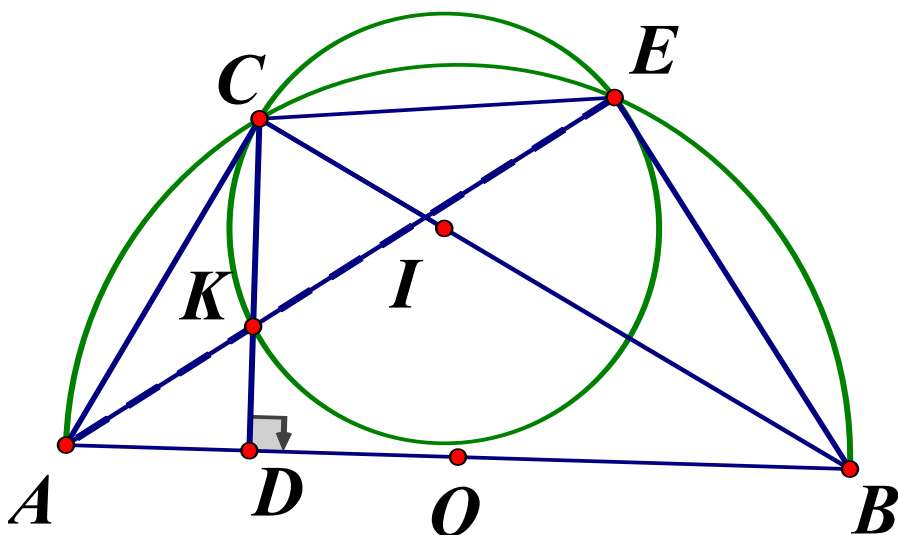
$$a^2 + b^2 = a + b + ab \Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (a - b)^2 = 2$$

$\Rightarrow$ trong 3 số $(a - 1)^2, (b - 1)^2, (a - b)^2$ phải có đúng hai số bằng 1 và 1 số bằng 0

Giải các trường hợp, ta thu được 6 nghiệm nguyên :

$$(a; b) \in \{(1; 2); (2; 1); (1; 0); (0; 1); (0; 0); (2; 2)\}$$

Bài 7. (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn đường kính AB , trên nửa đường tròn lấy điểm C cố định (khác A và B). Kẻ CD vuông góc với AB (D thuộc AB). Trên cung BC lấy điểm E bất kỳ (khác C và B), đường thẳng AE cắt CD tại K .



Chứng minh rằng :

d) Tứ giác $KDBE$ nội tiếp một đường tròn

Ta có : $\angle KEB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\angle KDB = 90^\circ$ (vì CD vuông góc với AB tại D)

$\Rightarrow \angle KEB + \angle KDB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà D và E là hai đỉnh đối nhau

$\Rightarrow KDBE$ là tứ giác nội tiếp

e) Chứng minh $AC^2 = AK.AE$

Tứ giác $KDBE$ nội tiếp $\Rightarrow \angle AKD = \angle ABC \Rightarrow \triangle ADK \sim \triangle AEB (g.g)$

Suy ra $\frac{AD}{AK} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AD.AB = AK.AE$ (1)

Ta có $\angle ACB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), tam giác ACB vuông tại C có CD là đường cao, theo hệ thức lượng: $AC^2 = AD.AB$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AC^2 = AK.AE$ (đpcm)

f) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác CEK luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi E thay đổi trên cung BC

Gọi I là tâm của đường tròn (CEK)

Từ $AC^2 = AK.AE \Rightarrow \triangle AKC \sim \triangle ACE (c.g.c) \Rightarrow \angle ACK = \angle CEK$

Suy ra AC là tiếp tuyến của đường tròn (CEK) $\Rightarrow IC \perp AC$, mà $BC \perp AC$

Suy ra 3 điểm B, I, C thẳng hàng hay I luôn thuộc đường thẳng BC – cố định