

HSG T9 Tỉnh Tây Ninh 21 22

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho x, y là các số tự nhiên sao cho $x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y + 2$ là một số chính phương. Tính giá trị của biểu thức $S = 5x - 5y + 2022$.

b) Cho a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn $a + b + c = 30$. Tìm dư của phép chia $a^5 + b^5 + c^5 + 2022$ cho 30.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho parabol $(P): y = 3x^2$ và đường thẳng $(d): y = (10 - 4m)x - 3m - 7$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số dương.

b) Giải phương trình $(2x + 1)\sqrt{4x^2 - 4x + 3} = 4x^2 + 1$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Cho x là số thực thỏa mãn $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$. Rút gọn biểu thức

$$T = \sqrt{3x + 2 + 4\sqrt{3x - 2}} + \sqrt{3x + 2 - 4\sqrt{3x - 2}}.$$

b) Cho a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh của một tam giác và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 27(a^2 + b^2 + c^2) + 108abc$.

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông tại A có trọng tâm G và BD là đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ (D thuộc cạnh AC). Biết $\widehat{GDC} = 90^\circ$. Tính $\widehat{ABC}$.

b) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC , E là giao điểm của CM và DN . Chứng minh tam giác AED cân.

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (T) , tâm O . Từ điểm A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với (T) (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm của AB , CM cắt (T) tại điểm D (D khác C). Tính $\frac{CD \cdot CM}{BC^2}$.

b) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có trọng tâm G và có diện tích bằng 2022. Xét đường thẳng d thay đổi đi qua điểm G và cắt các cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt tại D và E . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích các tam giác BDE và CDE .

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho x, y là các số tự nhiên sao cho $x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y + 2$ là một số chính phương. Tính giá trị của biểu thức $S = 5x - 5y + 2022$.

Lời giải

Đặt $M = x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y + 2$.

Ta có: $M > x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow M > (x + y)^2$.

Mà $M < x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 4y + 4 \Leftrightarrow M < (x + y + 2)^2$.

Ta lại có: $(x + y)^2, (x + y + 1)^2, (x + y + 2)^2$ là các số chính phương liên tiếp.

Suy ra $M = (x + y + 1)^2 \Leftrightarrow x - y = 1$.

Do đó $S = 5x - 5y + 2022 = 2027$.

b) Cho a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn $a + b + c = 30$. Tìm dư của phép chia $a^5 + b^5 + c^5 + 2022$ cho 30.

Lời giải

Ta có $a^5 - a = a(a^4 - 1) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1)$

Do $(a - 1)a(a + 1)$ chia hết cho 2 và 3, mà $(2; 3) = 1$ nên $(a - 1)a(a + 1)$ chia hết cho 6.

Nếu a chia cho 5 được dư 1; 0; 4 thì $(a - 1)a(a + 1)$ chia hết cho 5.

Nếu a chia cho 5 được dư là 2 thì $a^2 + 1 = (a - 2)(a + 2) + 5$ chia hết cho 5.

Nếu a chia cho 5 được dư là 3 thì $a^2 + 1 = (a - 3)(a + 3) + 10$ chia hết cho 5.

Do $(5; 6) = 1$ nên $a^5 - a$ chia hết cho 30; tương tự $b^5 - b; c^5 - c$ chia hết cho 30.

Khi đó: $a^5 + b^5 + c^5 + 2022 = (a^5 - a) + (b^5 - b) + (c^5 - c) + 68.30 + 12$.

Vậy dư của phép chia $a^5 + b^5 + c^5 + 2022$ cho 30 là 12.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho parabol $(P): y = 3x^2$ và đường thẳng $(d): y = (10 - 4m)x - 3m - 7$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số dương.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình $3x^2 = (10 - 4m)x - 3m - 7$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 2(5 - 2m)x + 3m + 7 = 0$ (*)

Yêu cầu bài toán được thoả khi (*) có hai nghiệm phân biệt đều dương. Điều này xảy ra khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 29m + 4 > 0 \\ \frac{3m+7}{3} > 0 \\ \frac{2(5-2m)}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 29m + 4 > 0 \\ m > -\frac{7}{3} \\ m < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 29m + 4 > 0 \quad (1) \\ -\frac{7}{3} < m < \frac{5}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Do m nguyên nên từ (2) suy ra $m = -2, m = -1, m = 0, m = 1, m = 2$.

Lần lượt thay $m = -2, m = -1, m = 0, m = 1, m = 2$ vào (1) ta thấy $m = -2, m = -1, m = 0$ thoả mãn. Vậy $m = -2, m = -1, m = 0$ là các giá trị cần tìm.

b) Giải phương trình $(2x+1)\sqrt{4x^2-4x+3} = 4x^2+1$.

Lời giải

Điều kiện: $2x+1 > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{4x^2-4x+3} + \sqrt{4x^2-4x+3} &= (\sqrt{4x^2-4x+3})^2 + 4x - 2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4x^2-4x+3})^2 - \sqrt{4x^2-4x+3} - 2 - 2x(\sqrt{4x^2-4x+3} - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4x^2-4x+3} - 2)(\sqrt{4x^2-4x+3} + 1 - 2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2-4x+3} = 2 \\ \sqrt{4x^2-4x+3} = 2x - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $\sqrt{4x^2-4x+3} = 2 \Leftrightarrow 4x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ (thoả điều kiện).

Với $\sqrt{4x^2-4x+3} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 3=1 \end{cases}$: phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$.

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Cho x là số thực thoả mãn $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$. Rút gọn biểu thức

$$T = \sqrt{3x+2+4\sqrt{3x-2}} + \sqrt{3x+2-4\sqrt{3x-2}}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= \sqrt{3x-2+4\sqrt{3x-2}+4} + \sqrt{3x-2-4\sqrt{3x-2}+4} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3x-2}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3x-2}-2)^2} \\ &= |\sqrt{3x-2}+2| + |\sqrt{3x-2}-2| \\ &= \sqrt{3x-2}+2 + |\sqrt{3x-2}-2| \end{aligned}$$

Do $\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ nên $\sqrt{3x-2} - 2 \leq 0$.

Vậy $T = \sqrt{3x-2} + 2 + 2 - \sqrt{3x-2} = 4$.

b) Cho a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh của một tam giác và thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 27(a^2 + b^2 + c^2) + 108abc$.

Lời giải

Ta có: $a^2 - (b-c)^2 \leq a^2 \Leftrightarrow (a-b+c)(a+b-c) \leq a^2$.

Tương tự $(b-a+c)(b+a-c) \leq b^2$, $(c-a+b)(c+a-b) \leq c^2$.

Từ đó suy ra $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Do $a + b + c = 1$ nên ta có

$$abc \geq (1-2a)(1-2b)(1-2c) = 1 - 2(a+b+c) + 4(ab+bc+ca) - 8abc$$

$$\Leftrightarrow abc \geq -\frac{1}{9} + \frac{4}{9}(ab+bc+ca)$$

Khi đó: $M \geq 27(a+b+c)^2 - 54(ab+bc+ca) - 12 + 48(ab+bc+ca)$.

Hay $M \geq 15 - 6(ab+bc+ca)$

Ta lại có: $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ $a = b = c$.

Suy ra $M \geq 15 - 2(a+b+c)^2 = 13$; $M = 13$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

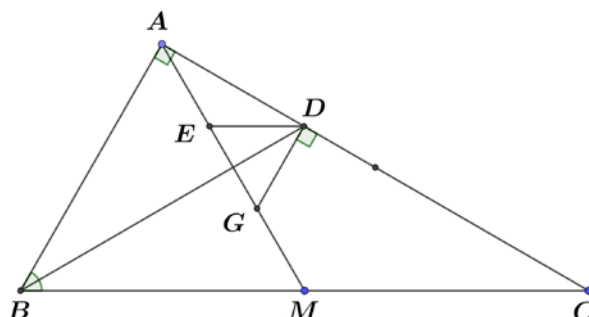
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là 13.

Câu 4. (4,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC vuông tại A có trọng tâm G và BD là đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ (D thuộc cạnh AC). Biết $\widehat{GDC} = 90^\circ$. Tính $\widehat{ABC}$.

Lời giải

Hình vẽ



Đặt M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AG .

Do $ED = \frac{1}{2}AG$ nên $\triangle EAD$ cân tại E , suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{EAD}$ (1)

Do $AM = \frac{1}{2}BC$ nên $\triangle MAC$ cân tại M , suy ra $\widehat{MAC} = \widehat{MCA}$ (2)

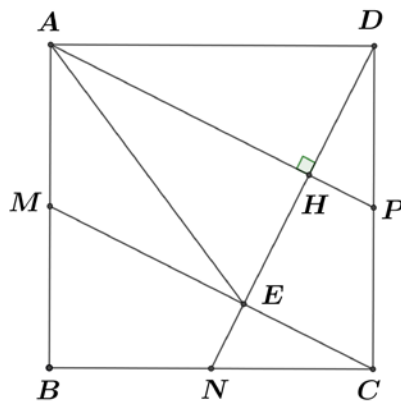
Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{EDA} = \widehat{MCA}$. Khi đó $ED \parallel MC \Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{EA}{EM} = \frac{1}{2}$.

Do tính chất phân giác, ta có $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC}$. Suy ra $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ hay $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

b) Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC , E là giao điểm của CM và DN . Chứng minh tam giác AED cân.

Lời giải

Hình vẽ



Đặt P là trung điểm của CD , H là giao điểm của AP và DN .

Ta có: tứ giác $APCM$ là hình bình hành (vì $AM = CP$ và $AM \parallel CP$) nên $PH \parallel CE$.

Suy ra PH là đường trung bình của tam giác CDE hay H là trung điểm của DE .

Do đó AH là đường trung tuyến của tam giác AED . (3)

Ta lại có: $\widehat{PAD} = \widehat{NDC}$ (vì $\triangle PAD = \triangle NDC$)

Mà $\widehat{PAD} + \widehat{APD} = 90^\circ$

Suy ra $\widehat{NDC} + \widehat{APD} = 90^\circ$ hay $AH \perp DE$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle AED$ có AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên $\triangle AED$ cân tại H .

Câu 5. (4,0 điểm)

a) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (T) , tâm O . Từ điểm A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với (T) (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm của AB , CM cắt (T) tại điểm D (D khác C). Tính $\frac{CD \cdot CM}{BC^2}$.

Lời giải

Hình vẽ

Suy ra $\frac{dt\Delta BDE + dt\Delta CDE}{dt\Delta ABC} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}$

Mà $\frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AE} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} \right)^2 = \frac{9}{4}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

Suy ra $\frac{dt\Delta BDE + dt\Delta CDE}{dt\Delta ABC} \geq \frac{4}{9} \Leftrightarrow dt\Delta BDE + dt\Delta CDE \geq \frac{2696}{3}$

Hay $dt\Delta BDE + dt\Delta CDE = \frac{2696}{3}$ khi $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ hay $d \parallel BC$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích các tam giác BDE và CDE bằng $\frac{2696}{3}$.

---Hết---