

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 2$ và $xyz \neq 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{xyz}$$

b) Cho $0 < x < 2$ thỏa mãn $\frac{3(x^2 + 5x - 1)}{x^2 + x - 1} + 23 = \frac{24(x^2 + 3x - 1)}{x^2 + 2x - 1}$

Tính giá trị của biểu thức $T = (x^2 - x - 2)^{2020} + \frac{1}{(x^2 - x)^{2021}}$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ trong đó $m^2 + n^2 = 2020$. Chứng minh rằng nếu phương trình có nghiệm x_0 thì $|x_0| < \sqrt{2021}$

b) Cho dãy số gồm 4041 số chính phương liên tiếp, trong đó tổng của 2021 số đầu bằng tổng của 2020 số cuối. Tìm số hạng thứ 2021 của dãy số đó.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right)\left(y + \frac{1}{2} + \sqrt{y^2 + y + 1}\right) = \frac{3}{2} \\ x^4 + 2(3 - 8y)x^2 + 16y - 7 = 0 \end{cases}$$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $\sqrt{9x^2 + 16x + 96} + 16y = 3x - 24$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và nằm tròn tam giác ABC , ($P \neq B, C, H$). Gọi M là giao điểm của đường thẳng PB với đường tròn (O) ($M \neq B$); N là giao điểm của đường thẳng PC với (O) , ($N \neq C$). Đường thẳng BM cắt AC tại E , đường thẳng CN cắt AB tại F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AME và đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF cắt nhau tại Q ($Q \neq A$)

a) Chứng minh tứ giác $AEPF$ nội tiếp

b) Chứng minh M, N, Q thẳng hàng

c) Trong trường hợp AP là phân giác của $\angle MAN$, chứng minh PQ đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC

Câu 5. (1,0 điểm) Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{\sqrt{xy}}{1 + \sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{yz}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1 + \sqrt{xy}}} \geq 2$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a)

$$\text{Từ } x + y + z = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 4 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 1$$

$$\text{Do } xyz \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{xyz} \text{ (dfcm)}$$

$$\text{b) Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + x - 1 \neq 0 \\ x^2 + 2x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{3(x^2 + 5x - 1)}{x^2 + x - 1} + 23 = \frac{24(x^2 + 3x - 1)}{x^2 + 2x - 1} \Leftrightarrow \frac{3\left[\left(x - \frac{1}{x}\right) + 5\right]}{\left(x - \frac{1}{x}\right) + 1} + 23 = \frac{24\left[\left(x - \frac{1}{x}\right) + 3\right]}{\left(x - \frac{1}{x}\right) + 2}$$

$$\text{Đặt } t = x - \frac{1}{x}, \text{ phương trình trở thành } t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} = 1 \\ x - \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } 0 < x < 2, \text{ đối chiếu điều kiện ta được } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\text{Vậy } T = (x^2 - x - 2)^{2020} + \frac{1}{(x^2 - x)^{2021}} = (-1)^{2020} + \frac{1}{1^{2021}} = 2$$

Câu 2.

a) Vì x_0 là nghiệm phương trình $x_0^2 + mx_0 + n = 0 \Rightarrow x_0^2 = -mx_0 - n$. Ta có:

$$x_0^4 = (mx_0 + n)^2 \leq (m^2 + n^2)(x_0^2 + 1) = 2020(x_0^2 + 1)$$

$$\Rightarrow x_0^4 - 1 < 2020(x_0^2 + 1) \Leftrightarrow x_0^4 - 2020x_0^2 - 2021 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0^2 + 1)(x_0^2 - 2021) < 0 \Leftrightarrow x_0^2 < 2021 \Leftrightarrow |x_0| < \sqrt{2021}$$

b) Gọi số chính phương thứ 2021 là $x^2, x \in \mathbb{N}, x \geq 2020$

Ta có 4041 số chính phương liên tiếp là :

$$(x - 2020)^2; (x - 2019)^2; \dots; (x - 1)^2; x^2; (x + 1)^2; \dots; (x + 2020)^2$$

Theo đề bài:

$$(x-2020)^2 + (x-2019)^2 + \dots + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 + \dots + (x+2020)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = (x+1)^2 - (x-1)^2 + (x+2)^2 - (x-2)^2 + \dots + (x+2020)^2 - (x-2020)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4x(1+2+3+\dots+2020) \Leftrightarrow x^2 = 4x \cdot \frac{2020 \cdot 2021}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8164840x \Leftrightarrow x = 8164840 \text{ (do } x \neq 0)$$

Vậy số cần tìm là $x^2 = 8164840^2$

Câu 3. a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right) \left(y + \frac{1}{2} + \sqrt{y^2 + y + 1}\right) = \frac{3}{2} & (1) \\ x^4 + 2(3-8y)x^2 + 16y - 7 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$pt(1) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 3} = -(2y+1) + \sqrt{(2y+1)^2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow (x+2y+1) \left[\frac{(x + \sqrt{x^2 + 3}) + \sqrt{(2y+1)^2 + 3} - (2y+1)}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{(2y+1)^2 + 3}} \right] = 0$$

$$Do \frac{(x + \sqrt{x^2 + 3}) + \sqrt{(2y+1)^2 + 3} - (2y+1)}{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{(2y+1)^2 + 3}} > 0 \Leftrightarrow 2y = -1 - x$$

Thế $2y = -1 - x$ vào ta có:

$$pt(2) \Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 8x + 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -3 \Rightarrow y = 1 \\ x = -5 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(1; -1); (-1; 0); (-3; 1); (-5; 2)$

b) Ta có:

$$\sqrt{9x^2 + 16x + 96} + 16y = 3x - 24 \Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 16x + 96} = 3x - 16y - 24$$

Đặt $3x - 16y - 24 = a (a \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\})$. Khi đó $9x^2 + 16x + 96 = a^2$

$$\Leftrightarrow 81x^2 + 144x + 864 = 9a^2 \Leftrightarrow (9x + 8)^2 - (3a)^2 = -800$$

$$\Leftrightarrow (9x + 8 - 3a)(9x + 8 + 3a) = -800 (*)$$

$$\text{Thay } a = 3x - 16y - 24 \text{ vào } (*) \Rightarrow (9x - 24y - 32)(3y + 5) = -25$$

$$\Rightarrow 25 : (3y + 5) \text{ mà } 3y + 5 \text{ chia 3 dư 2 nên } 3y + 5 \in \{-1; 5; -25\}$$

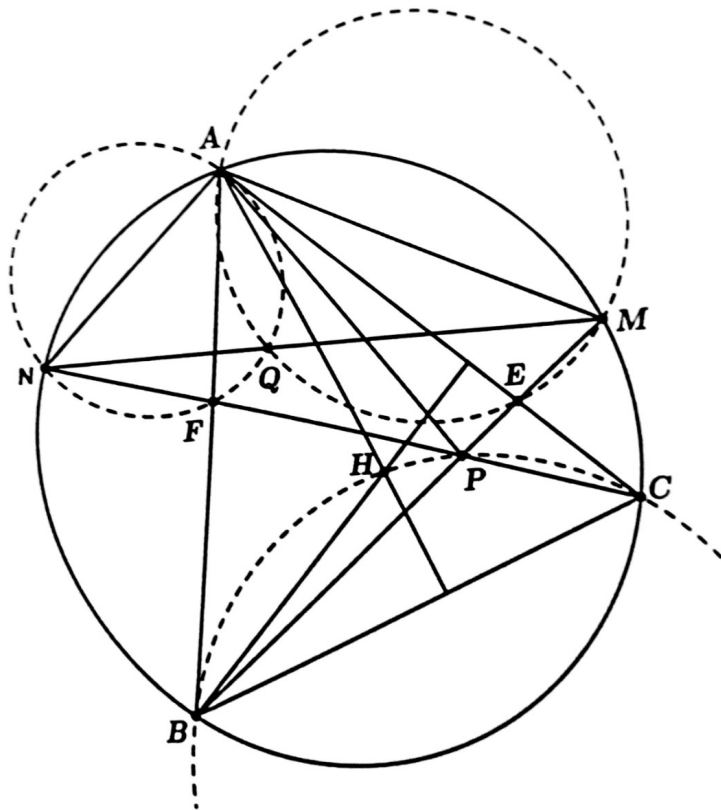
$$*) \text{ Với } 3y + 5 = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow x = 1(tm)$$

$$*) \text{ Với } 3y + 5 = 5 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 3(ktm \text{ do } a < 0)$$

$$*) \text{ Với } 3y + 5 = -25 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow x = -23(tm)$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(1; -2); (-23; -10)\}$$

Câu 4.



CS Scanned with CamScanner

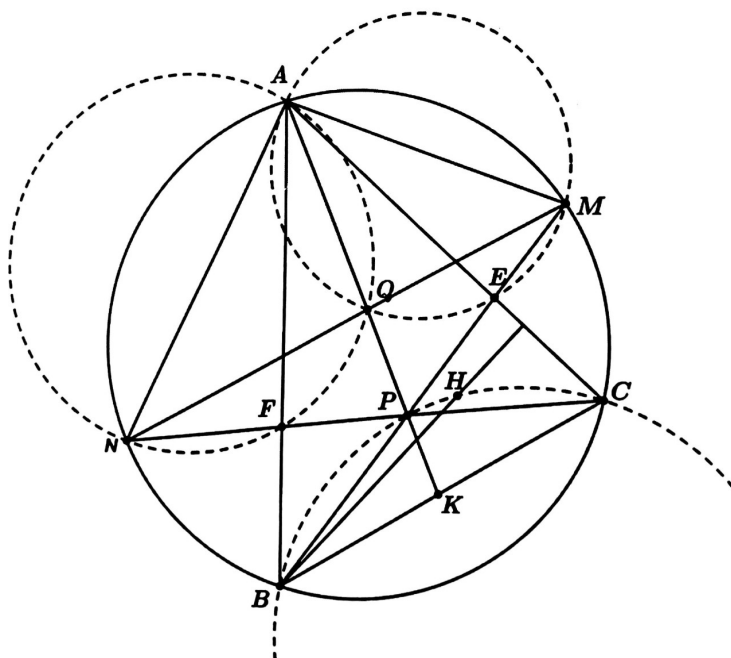
a) Ta có: $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, mà $\angle BPC = \angle BHC = \angle EPF$

Suy ra được $\angle BAC + \angle EPF = 180^\circ \Rightarrow AEPF$ là tứ giác nội tiếp

b) Từ tứ giác $AEPF$ nội tiếp $\Rightarrow \angle BFC + \angle BEC = 180^\circ$

Từ các tứ giác $AQFN, AQE$ nội tiếp ta có $\widehat{MQN} = \widehat{MQA} + \widehat{NQA}$
 $= \widehat{MEA} + \widehat{NFA} = 180^\circ \Rightarrow 3 \text{ điểm } M, N, Q \text{ thẳng hàng}$

c)



Ta có $\widehat{QFA} = \widehat{ANQ} = \widehat{ANM} = \widehat{ABM} \Rightarrow FQ \parallel BE$, tương tự: $EQ \parallel CF$ suy ra tứ giác $EQFP$ là hình bình hành

Vậy $\widehat{QAN} = \widehat{QFP} = \widehat{QEP} = \widehat{QAM}$ hay AQ là phân giác của $\angle MAN \Rightarrow A, P, Q$ thẳng hàng.

Gọi $K = PQ \cap BC \Rightarrow \angle KAC = \angle QAC = \angle QME = \angle NMB = \angle PCK$

Từ đó ta có: $\triangle AKC \sim \triangle CKP \Rightarrow KC^2 = KP.KA$, tương tự: $KB^2 = KP.KA$

Nên $KB = KC$

Câu 5.

$$\frac{\sqrt{xy}}{1+\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{yz}} + \sqrt{\frac{2\sqrt{yz}}{1+\sqrt{xy}}} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{z}} + \frac{1}{\sqrt{y} \cdot (\sqrt{x}+\sqrt{z})} + \sqrt{\frac{2\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{y}}+\sqrt{x}}} \geq 2$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} \sqrt{x} = a \\ \frac{1}{\sqrt{y}} = b, a, b, c > 0 \Rightarrow BDT(*) \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geq 2(**) \\ \sqrt{z} = c \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \geq \frac{4}{A+B} \quad (A, B > 0) \Rightarrow \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{4}{b+c+c+a} = \frac{4}{2c+a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 = (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq \frac{4(a+b+c)}{2c+a+b} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \sqrt{\frac{2c}{a+b}} = \frac{2c}{\sqrt{2c(a+b)}} \geq \frac{4c}{2c+a+b} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \sqrt{\frac{2c}{a+b}} \geq \frac{4(a+b+c)}{2c+a+b} - 2 + \frac{4c}{2c+a+b} = 4 - 2 = 2$$

BDT (**) đúng vậy bất cần chứng minh là đúng

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} = z$