

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2019

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

BẢN CHÍNH

Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất : 13/01/2019

Bài 1 (5,0 điểm). Cho hàm số liên tục $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

- a) Chứng minh rằng $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.
b) Chứng minh rằng tồn tại hai dãy $(x_n), (y_n)$ với $x_n < y_n$ ($n = 1, 2, \dots$) sao cho chúng hội tụ tới cùng một giới hạn và thỏa mãn $f(x_n) = f(y_n)$ với mọi n .

Bài 2 (5,0 điểm). Xét dãy số nguyên (x_n) thỏa mãn $0 \leq x_0 < x_1 \leq 100$ và

$$x_{n+2} = 7x_{n+1} - x_n + 280, \quad \forall n \geq 0.$$

- a) Chứng minh rằng nếu $x_0 = 2$ và $x_1 = 3$ thì với mọi số tự nhiên n , tổng các ước nguyên dương của $x_n x_{n+1} + x_{n+1} x_{n+2} + x_{n+2} x_{n+3} + 2018$ chia hết cho 24.
b) Tìm tất cả các cặp (x_0, x_1) để $x_n x_{n+1} + 2019$ là số chính phương với vô số số tự nhiên n .

Bài 3 (5,0 điểm). Với mỗi đa thức $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$, đặt

$$\Gamma(f(x)) = a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_m^2.$$

Cho đa thức $P(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+2020)$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2^{2019} đa thức đôi một phân biệt $Q_k(x)$ ($1 \leq k \leq 2^{2019}$) với các hệ số dương thỏa mãn hai điều kiện sau:

- i) $\deg Q_k(x) = 2020$,
ii) $\Gamma(Q_k(x)^n) = \Gamma(P(x)^n)$ với mọi số nguyên dương n .

Bài 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn nội tiếp I . Trên các tia AB, AC, BC, BA, CA, CB lần lượt lấy các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sao cho $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = CA$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Các cặp đường thẳng $(B_1 B_2, C_1 C_2), (C_1 C_2, A_1 A_2), (A_1 A_2, B_1 B_2)$ lần lượt có các giao điểm là A', B', C' .

- a) Chứng minh rằng diện tích tam giác $A'B'C'$ không vượt quá diện tích tam giác ABC .
b) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Các đường thẳng AJ, BJ, CJ lần lượt cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại R, S, T tương ứng. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AST, BTR, CRS cùng đi qua một điểm K . Chứng minh rằng nếu tam giác ABC không cân thì IHK là hình bình hành.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM 2019

ĐỀ THI CHÍNH THỨC



Môn : TOÁN

Thời gian : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai : 14/01/2019

Bài 5 (6,0 điểm). Xét đa thức $f(x) = x^2 - \alpha x + 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

- a) Khi $\alpha = \frac{\sqrt{15}}{2}$, hãy viết $f(x)$ thành thương của hai đa thức với các hệ số không âm.
b) Tìm tất cả các giá trị của α để $f(x)$ viết được thành thương của hai đa thức với các hệ số không âm.

Bài 6 (7,0 điểm). Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm H . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB và D, E, F lần lượt là chân các đường cao tương ứng với các đỉnh A, B, C của tam giác ABC . Gọi K là điểm đối xứng của H qua BC . Hai đường thẳng DE và MP cắt nhau tại X ; hai đường thẳng DF và MN cắt nhau tại Y .

- a) Đường thẳng XY cắt cung nhỏ $\widehat{BC}$ của (O) tại Z . Chứng minh rằng bốn điểm K, Z, E, F cùng thuộc một đường tròn.
b) Hai đường thẳng KE, KF lần lượt cắt lại (O) tại các điểm thứ hai S và T (khác K). Chứng minh rằng các đường thẳng BS, CT và XY đồng quy.

Bài 7 (7,0 điểm). Có một số mảnh giấy hình vuông có cùng kích thước, mỗi mảnh được chia caro thành 5×5 ô vuông ở cả hai mặt. Ta dùng n màu để tô các mảnh giấy sao cho mỗi ô của mỗi mảnh giấy được tô cả hai mặt bởi cùng một màu. Hai mảnh giấy màu được coi là giống nhau nếu có thể xếp chúng chồng khít lên nhau sao cho các cặp ô vuông ở cùng vị trí có cùng màu. Chứng minh rằng ta thu được không quá $\frac{1}{8}(n^{25} + 4n^{15} + n^{13} + 2n^7)$ mảnh giấy màu đôi một không giống nhau.

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.