

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  
**TUYÊN QUANG**  
**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9**  
**NĂM HỌC 2022 - 2023**  
**Môn thi: TOÁN**  
**Thời gian: 150 phút**  
**Ngày thi: 04/03/2023**

**Bài 1.** a) Rút gọn biểu thức  $P = \left( \frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right) \left( x - \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \right)$ , với  $x \geq 0, x \neq 4$ .

b) Cho ba số thực  $x, y, z$  thỏa mãn  $3\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 2$

Chứng minh rằng  $\frac{4yz}{x} + \frac{5zx}{y} + \frac{7xy}{z} \geq 8$

**Bài 2.** a) Giải phương trình  $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

b) Giải hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = x + 4 \\ 3xy = y - 4 \end{cases}$

**Bài 3.** Cho đường tròn tâm O, đường kính  $BC = 2R$  cố định. Điểm A di động trên (O) sao cho A khác B và C. Gọi M là điểm đối xứng của A qua B, điểm H là hình chiếu của A trên BC và I là trung điểm của HC.

a) Chứng minh rằng  $AH \cdot CA = AM \cdot CI$

b) Chứng minh rằng  $HM \perp AI$ .

c) Đường thẳng MH cắt đường tròn (O) tại E và F ( $ME < MF$ ). Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai G. Chứng minh rằng  $AF^2 + FG^2 + GE^2 + EA^2$  không đổi.

**Bài 4.** a) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $x^2 + x + y^2 = 6$

b) Cho  $P(x)$  là một đa thức hệ số nguyên. Chứng minh rằng đa thức  $P(x)$  không có nghiệm nguyên trong mỗi trường hợp sau:

i) Tích  $P(1) \cdot P(2) \cdot \dots \cdot P(23)$  không chia hết cho 23.

ii) Tích  $P(Q(1)) \cdot P(Q(2)) \cdot \dots \cdot P(Q(23))$  không chia hết cho 23 với  $Q(x) = x^3 - 1$

**Bài 5.** Cho một đa giác đều có 2023 đỉnh. Trên mỗi đỉnh của đa giác ta viết một số thực dương. Nếu ba số  $a, b, c$  theo thứ tự được viết trên ba đỉnh liên tiếp của đa giác thì  $b = \frac{2ac}{a+c}$ . Chứng minh rằng nếu có một đỉnh được ghi số 2306 thì tất cả các đỉnh của đa giác đều được ghi số 2306.