

**Bài 1.** (1,5 điểm) Cho biểu thức  $A = \left( \frac{x-1}{x-3\sqrt{x}+2} - \frac{x-4\sqrt{x}+14}{x+\sqrt{x}-6} + \frac{x-4\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} \right) \cdot (x-2\sqrt{x})$  với  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  và  $x \neq 4$ . Rút gọn biểu thức  $A$  và tính giá trị của  $A$  khi  $x$  là tổng của 45 số tự nhiên lẻ đầu tiên.

**Bài 2.** (1,5 điểm) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $A(5;0), B(5;5), C(0;5)$ , với  $O$  là gốc tọa độ. Bạn An chọn ngẫu nhiên một điểm  $M$  có hoành độ và tung độ là các số nguyên, nằm trên các cạnh hoặc nằm trong hình vuông  $OABC$ .

- Mô tả không gian mẫu của phép thử trên. Không gian mẫu có bao nhiêu phần tử?
- Tính xác suất của biến cố  $A$ : "Bạn An chọn được điểm  $M$  sao cho diện tích hình vuông  $OABC$  nhỏ hơn 5 lần diện tích tam giác  $OAM$ ".

**Bài 3.** (2,0 điểm)

- Giải phương trình  $3(4x^2 - 1) = x(2\sqrt[3]{x^2 + 3x} + 1)$ .
- Trong một đợt thử nghiệm giải toán bằng phần mềm trí tuệ nhân tạo (AI), tổng số câu hỏi mà hai phần mềm C và D phải trả lời là 200 câu hỏi. Kết quả cho thấy: phần mềm C trả lời đúng 90 câu, phần mềm D trả lời đúng 85 câu và tỉ lệ trả lời đúng của phần mềm C cao hơn 5% so với tỉ lệ trả lời đúng của phần mềm D. Tính số câu hỏi mà mỗi phần mềm đã trả lời.

**Bài 4.** (1,5 điểm)

- Cho phương trình  $4x^2 - 8(m+1)x - 2m - 9 = 0$ , với  $m$  là tham số. Chứng minh rằng với mọi giá trị của  $m$  thì phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  thỏa mãn:

$$2|x_1 - x_2| \geq \sqrt{3}(1 + 2x_1)(1 + 2x_2) + 8\sqrt{3}.$$

- Xét các số nguyên  $x, y, z$  và số nguyên dương  $n$  thỏa mãn:  $2x^2 + 10xy + 13y^2 = 29^n z$ . Chứng minh rằng luôn biểu diễn được  $z$  dưới dạng tổng hai bình phương của hai số nguyên.

**Bài 5.** (2,0 điểm) Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$  và có các đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Hai tiếp tuyến của  $(O)$  tại  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $M$ . Các đường thẳng  $EF$  và  $MB$  cắt nhau tại  $N$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $BC$ . Chứng minh rằng:

- Đường thẳng  $BN$  song song với đường thẳng  $DF$ .
- Ba đường thẳng  $DE, KN, HM$  đồng quy.

**Bài 6.** (1,5 điểm) Cho tam giác  $ABC$  nhọn, nội tiếp đường tròn  $(O)$  và ngoại tiếp đường tròn  $(I)$ . Các tia  $AI, BI$  và  $CI$  lần lượt cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai là  $D, E$  và  $F$ .

- Chứng minh rằng đường thẳng  $EF$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AI$ .
- Đường thẳng  $AB$  cắt các cạnh  $FE$  và  $FD$  lần lượt tại  $G$  và  $H$ , đường thẳng  $BC$  cắt các cạnh  $DF$  và  $DE$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ , đường thẳng  $CA$  cắt các cạnh  $ED$  và  $EF$  lần lượt tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh rằng  $\sqrt{AB+BC+CA} = \sqrt{GH} + \sqrt{MN} + \sqrt{PQ}$ .

----- HẾT -----