

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN**

KỲ THI TUYỂN SINH 10 THPT

NĂM HỌC 2023-2024

Môn thi: TOÁN (chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút(không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (4.00 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Rút gọn biểu thức A; tính giá trị của A, biết $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$

b) Cho biết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{2}$ ($a>1, b>1$). Chứng minh rằng $ab - \sqrt{1-a^2b^2} + a^2 + b^2 = 1$

Câu 2. (6,00 điểm) Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $(x-\sqrt{3})^3 + (x+\sqrt{5})^3 + (\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x)^3 = 0$

b)
$$\begin{cases} (xy)^3 + (x+\sqrt{5})^3 + (\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x)^3 = 0 \\ 3xy^3 = y^2 + 2 \end{cases}$$

Câu 3. (3,00 điểm) Cho đoạn thẳng AB, với M là trung điểm. Trên đường trung trực Mt của đoạn thẳng AB lấy điểm I bất kì. Vẽ tia Ax sao cho AI là phân giác góc BAx. Đường thẳng BI cắt Ax tại N. Gọi C là điểm đối xứng của A qua N, H là hình chiếu vuông góc của C lên AB.

a) Chứng minh rằng tam giác NHB cân

b) Chứng minh đẳng thức: $BH^2 = HI.BN$

c) Khi điểm I di chuyển trên đường trung trực Mt đến vị trí làm cho tam giác ABC vuông tại

C, hãy tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$

Câu 4. (1,00 điểm) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), với a,b,c là số thực thỏa

$2a - b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm không thể đều dương.

Câu 5. (3,00 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng DC. Đường thẳng qua C vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại E. Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên đường thẳng DC.

a) Chứng minh BH vuông góc với AI.

b) Đường thẳng qua B vuông góc với BH cắt đường thẳng DC tại K. Chứng minh tứ giác BCEK nội tiếp.

Câu 6. (3,00 điểm) Cho $x \geq 1, 0 < y \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{x}{x^2+y} + \frac{y}{y^2+x}$

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH PHÚ YÊN**

KỲ THI TUYỂN SINH 10 THPT

NĂM HỌC 2023-2024

Môn thi: TOÁN (chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút(không kể thời gian giao đề)

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

(Gồm có 04 trang)

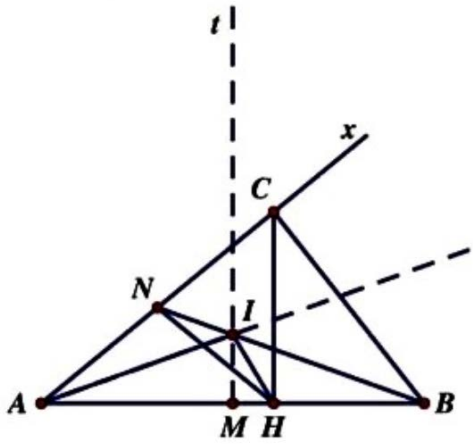
1. Hướng dẫn chung

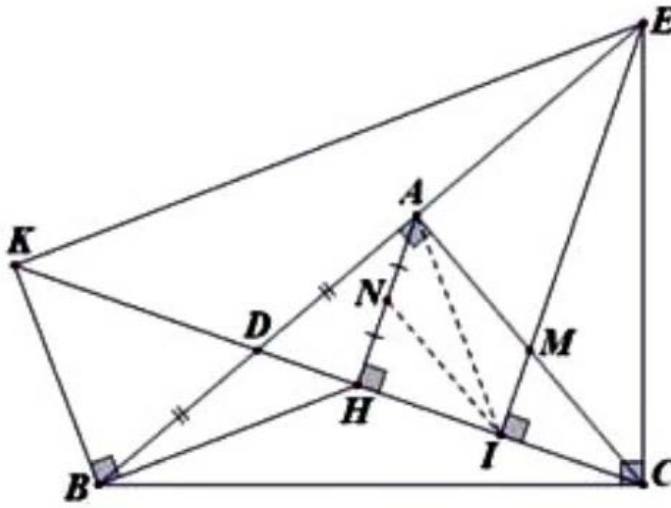
- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm chấm phải bảo đảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.
- Điểm bài thi không làm tròn số.

2. Đáp án và thang điểm

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1		4,00 đ
	a) Rút gọn, tính giá trị $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ Biết $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$.	2,50 đ
	-Rút gọn A : Với điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$, ta có: $A = \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$	1,00đ
	-Lại có: $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+1} + \frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}+1} = \frac{16}{4} = 4$.	1,00 đ
	Do đó: $A = \frac{\sqrt{4}+1}{4+\sqrt{4}+1} = \frac{3}{7}$	0,50 đ
	b) Biết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{2}$ ($a>1, b>1$).CMR: $ab - \sqrt{1-a^2b^2} + a^2 + b^2 = 1$	1,50 đ
	Vì $a > 1, b > 1$ nên: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2a^2b^2 - 2ab$.	0,50 đ
	Khi đó: $B = ab - \sqrt{1-a^2b^2} + 2a^2b^2 - 2ab = ab - \sqrt{(ab-1)^2}$.	0,50 đ
	Vì $a > 1, b > 1 \Rightarrow ab > 1$ nên $B = ab - ab + 1 = 1$ (điều phải chứng minh)	0,50 đ
2	Giải các phương trình, hệ phương trình	6,00 đ
	a) $(x-\sqrt{3})^3 + (x+\sqrt{5})^3 + (\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x)^3 = 0$	3,00 đ

	Đặt $u = x - \sqrt{3}$, $v = x + \sqrt{5}$, khi đó $\sqrt{3} - \sqrt{5} - 2x = -(u + v)$	1,00 đ
	PTCĐ viết lại là: $u^3 + v^3 - (u + v)^3 = 0 \Leftrightarrow 3(u + v)uv = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 0 \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$	1,00 đ
	(1): $u + v = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{3} + x + \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2}$ (2): $u = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$; (3): $v = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{5}$ Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}}{2}; \sqrt{3}; \sqrt{5} \right\}$	1,00đ
	Cách 2: Đặt $a = x - \sqrt{3} + x + \sqrt{5}$, $c = \sqrt{3} - \sqrt{5} - 2x$. Khi đó: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (chứng minh). Từ đó ta có nghiệm như cách 1	
	b) $\begin{cases} (xy)^3 + 3xy^3 + 2 = 6y^2 & (1) \\ 3xy^3 = y^2 + 2 & (2) \end{cases}$	3,00đ
	Đặt $\begin{cases} u = xy \\ v = y^2 \end{cases}$. Dễ thấy $y \neq 0$. Từ (2) suy ra $3xy = \frac{y^2 + 2}{y^2} > 0$, do đó ta luôn có $u > 0, v > 0$ (3)	0,50đ
	Ta có hệ phương trình mới: $\begin{cases} u^3 + 3uv + 2 = 6v & (4) \\ 3uv = v + 2 & (5) \end{cases}$ Thế (5) và (4) ta được: $v = \frac{u^3 + 4}{5}$ (6)	0,50đ
	Thế (6) vào (5) ta được: $3u^4 - u^3 + 12u - 14 = 0 \Leftrightarrow (u - 1)(3u^3 + 2u^2 + 2u + 14) = 0$ (7) Đối chiếu với điều kiện (3) thì $3u^3 + 2u^2 + 2u + 14 > 0$ nên (7) có nghiệm $u = 1$	1,00 đ
	Với $u = 1$, từ (6) suy ra $v = 1$ hay $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 1$. Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x; y) = (1; 1)$ và $(x; y) = (-1; -1)$	1,00đ

3		3,00đ
	a) Chứng minh ΔNHB cân	1,00đ
	ΔAHC vuông tại H có HN là trung tuyến nên $NA = NC = NH$ nên ΔHNA cân tại N , suy ra $\widehat{NHA} = \widehat{NAH}$, do đó $\widehat{NHA} = 2\widehat{IAB} = 2\widehat{IBH} = 2\widehat{NBH}$ (1).	0,50 đ
	Theo tính chất góc ngoài của tam giác thì $\widehat{NHA} = \widehat{HNB} + \widehat{HBN}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{HNB} = \widehat{HBN}$ hay ΔNHB cân tại H	0,50đ
	b) Chứng minh $BH^2 = HI.BN$	1,00 đ
	Theo a) ΔNHB cân tại H suy ra $HB = HN = \frac{1}{2}AC$ (3)	
	Xét ΔNHI và ΔBHI có $\begin{cases} \widehat{IAN} = \widehat{IBH} \\ IA = IB \\ AN = BH (= HN) \end{cases} \Rightarrow \Delta ANI = \Delta BHI \Rightarrow IN = IH$ Dẫn đến ΔNHI cân tại $I \Rightarrow \widehat{IHN} = \widehat{INH} \Rightarrow \Delta NHB \sim \Delta NHI$ (hai tam giác cân có góc ở đáy bằng nhau)	0,50 đ
	$\Rightarrow \frac{BH}{BN} = \frac{HI}{HN} \Rightarrow BH.BN = HI.BN \Rightarrow BH^2 = HI.BN$	0,25 đ
	c) Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$ khi $\Rightarrow ABC$ vuông	1,00 đ
	Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông và định lí Pytago ta có $BC^2 = BH.BA = AB^2 - AC^2 \Leftrightarrow AB^2 - BH.BA - AC^2 = 0(4)$ Từ (3) và (4) ta có $2AB^2 - AB.AC - 2AC^2 = 0(5)$	0,50 đ

	Vì $AC > 0$, chia 2 vế cho AC^2 ta được phương trình bậc 2 với $x = \frac{AB}{AC}$ là: $2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$ Do $\frac{1-\sqrt{17}}{4} < 0$ (loại) nên ta chọn $x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$, hay $\frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$	
4		
	Ta có biểu thức: $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4a(b - 2a) = (2a - b)^2 + 4a^2 > 0, \forall a \neq 0$; do đó, phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.	
	Giả sử 2 nghiệm đã cho là x_1, x_2. Theo định lí Viét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ Từ giả thiết $2a - b + c = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} - \frac{c}{a} = 2$, do đó $-(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 2(x_1 + 1)(x_2 + 1) = -1(*)$. Nếu 2 nghiệm đều dương thì $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 1$, mâu thuẫn với (*). Vậy 2 nghiệm của phương trình không thể đều dương.	
5		3,00đ
	a) Chứng minh $BH \perp AI$	0,50đ
	Gọi M là giao điểm của EI và AC, ta có M là trực tâm của tam giác ECD $\Rightarrow DM \parallel BC$.	0,50đ

	Tam giác ABC có $DA = DB$, $DM \parallel BC \Rightarrow MA = MC$. Tam giác AHC có $MA = MC$, $MI \parallel AH \Rightarrow IH = IC$. Gọi N là trung điểm của AH ta có $IN \parallel AC \Rightarrow IN \perp AD$	0,50đ
	Tam giác ADI có $AH \perp DI$, $IN \perp AD$ do đó N là trực tâm $\Rightarrow DN \perp AI \Rightarrow BH \perp AI$	0,50đ
	b) Chứng minh tứ giác BCEK nội tiếp	1,50đ
	Từ $BH \perp AI \Rightarrow IN \parallel AC \Rightarrow \widehat{IAD} = \widehat{KBD}$ Xét $\triangle KBD$ và $\triangle IAD$ có: $\widehat{IAD} = \widehat{KBD}$, $DA = DB$, $\widehat{ADI} = \widehat{BDK} \Rightarrow \triangle KBD = \triangle IAD$ $\Rightarrow DK = DI$ (1).	0,50đ
	Vì $\triangle DAC \sim \triangle DIE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DA}{DI} = \frac{DC}{DE} \Rightarrow DA.DE = DI.DC$ (2).	0,50đ
	Từ (1) và (2) kết hợp với $DA = DB$ suy ra $DA.DE = DK.DC$ $\Rightarrow \frac{DK}{DE} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \triangle DEK \sim \triangle DCB \Rightarrow \widehat{DEK} = \widehat{DCB}$ dẫn đến BCEK nội tiếp.	0,50đ
6	Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x \geq 1, 0 < y \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{x}{x^2+y} + \frac{y}{y^2+x}$	3,00 đ
	Với giả thiết đã cho, ta sẽ chứng minh $\frac{1}{y+1} \geq \frac{x}{x^2+1}$ (1) và $\frac{1}{x+1} \geq \frac{y}{y^2+x}$ (2)	0,50 đ
	Ta có: (1) $\Leftrightarrow xy + x - x^2 - y \leq 0 \Leftrightarrow y(x-1) + x(1-x) \leq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(y-x) \leq 0$ (3)	0,50 đ
	(3) đúng vì $x \geq 1, 0 < y \leq 1$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1, 0 < y \leq 1$	0,50 đ
	Ta cũng có: (2) $\Leftrightarrow xy + y - y^2 - x \leq 0 \Leftrightarrow y(x-y) - (x-y) \leq 0$ $\Leftrightarrow (x-y)(y-1) \leq 0$ (4)	0,50 đ
	(4) đúng vì $x \geq 1, 0 < y \leq 1$ Dấu bất đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$	0,50 đ
	Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{x}{x^2+y} + \frac{y}{y^2+x}$ Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = y = 1$	0,50 đ