

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
TỈNH THÁI NGUYÊN **NĂM HỌC 2024 - 2025**

Đề chính thức

Môn thi: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 10/09/2024

Đề thi gồm 01 trang, 05 câu

Câu 1. (6,0 điểm)

a/ Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 0, u_2 = 3$ và $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ với mọi $n \geq 1$. Gọi p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng u_p chia hết cho p .

b/ Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x - 3f(xy)) = 3x \cdot f(1 - f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 2. (4,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng

$$(a^2 - 2a + 2)(b^2 - 2b + 2)(c^2 - 2c + 2) \leq (abc)^2 - 2abc + 2.$$

Câu 3. (4,0 điểm)

Tìm số nguyên dương n để tồn tại các số thực a, b, c, d khác 0 sao cho trong khai triển của biểu thức $(ax + b)^{2024} - (cx + d)^{2024}$ có đúng n hệ số khác 0.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác nhọn, không cân ABC , (I) là đường tròn nội tiếp, H là trực tâm. Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và BC, CA, AB . Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng của A, B, C qua trung trực của các đoạn thẳng HD, HE, HF . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AIA', BIB', CIC' có một điểm chung khác I .

Câu 5. (2,0 điểm)

Trên bảng có hai số nguyên dương phân biệt. Mỗi lần cho phép thay đổi các số trên bảng theo quy tắc sau: nếu trên bảng xuất hiện hai số khác nhau x, y thì thay số bé hơn trong hai số bởi số $\frac{xy}{|x - y|}$ và giữ nguyên số còn lại. Chứng minh rằng sau khi thực hiện quy tắc liên tục một số hữu hạn lần thì trên bảng xuất hiện hai số bằng nhau.

—————Hết—————

Chú ý: - Thí sinh không được dùng tài liệu.

- Giám thị không giải thích gì thêm.

I. Hướng dẫn chung

1) Nếu học sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

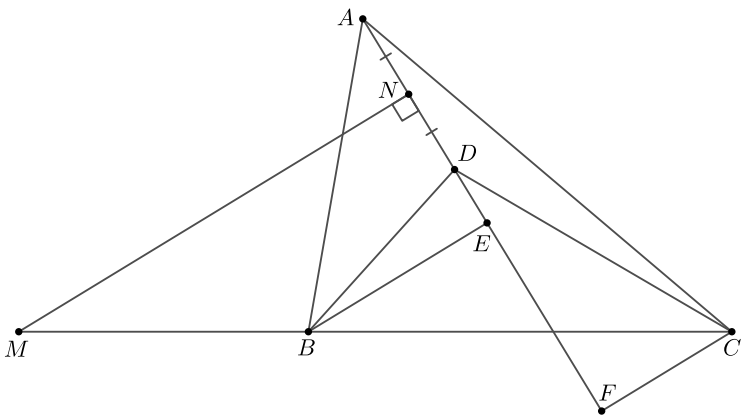
2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải bảo đảm không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

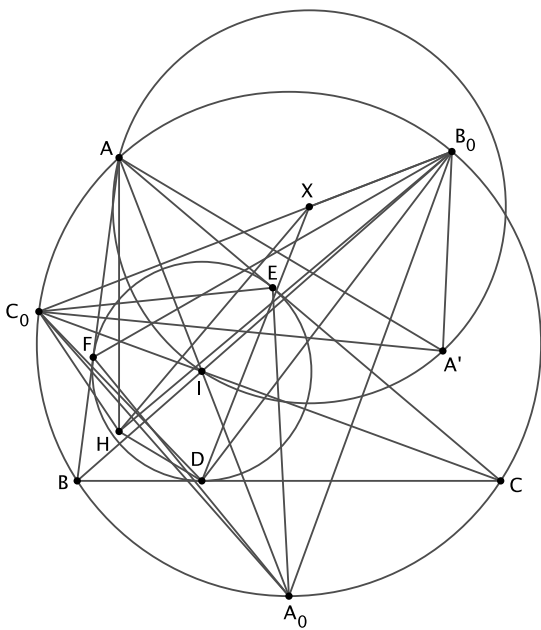
II. Đáp án và thang điểm

Câu	Nội dung	Điểm
1a (3,0 điểm)	Phương trình $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ có hai nghiệm là $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Suy ra số hạng tổng quát của dãy (u_n) có dạng $u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$ với mọi $n = 1, 2, \dots$ Vì $u_1 = 0, u_2 = 3$ nên ta có $\begin{cases} 2A + 3B = 0 \\ 4A + 9B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-3}{2} \\ B = 1. \end{cases}$ Suy ra $u_n = -3 \cdot 2^{n-1} + 3^n$ với mọi $n \geq 1$.	1,5
	- Với $n = 3$, ta có: $u_3 = 15$. Suy ra u_3 chia hết cho 3. - Với $n = p$ với p là số nguyên tố lẻ, khác 3, theo định lý Fermat nhỏ ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ và $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Suy ra $u_p = -3 \cdot 2^{p-1} + 3^p \equiv -3 \cdot 1 + 3 = 0 \pmod{p}$. Do đó u_p chia hết cho p.	1,5
1b (3,0 điểm)	Theo đề bài với mọi số thực x, y ta có: $f(x - 3f(xy)) = 3x \cdot f(1 - f(y)). \quad (1)$ Thay $y = 0$ trong (1), ta được: $f(x - 3f(0)) = 3x \cdot f(1 - f(0)). \quad (2)$ Thay x bởi $x + 3f(0)$ trong (2), ta được: $f(x) = 3(x + 3f(0)) \cdot f(1 - f(0)).$	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	Do đó $f(x)$ có dạng $f(x) = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Thay vào (1), ta được $a(x - 3f(xy)) + b = 3x \cdot [a(1 - f(y)) + b] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Suy ra $ax - 3a^2xy - 3ab + b = 3x(a + b - a^2y - ab) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Do đó $(2a + 3b - 3ab)x + 3ab - b = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ Suy ra $2a + 3b - 3ab = 0$ và $3ab - b = 0$. Do đó $a = \frac{1}{3}$ hoặc $b = 0$.	1,0
	• Nếu $a = \frac{1}{3}$ thì $b = \frac{-1}{3}$. Khi đó $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$. Thử lại thấy thỏa mãn. • Nếu $b = 0$ thì $a = 0$. Khi đó $f(x) = 0$. Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy $f(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ hoặc $f(x) = 0$.	1,0
2 (4,0 điểm)	Trước tiên, ta chỉ ra rằng với mọi số thực không âm x, y $(x^2 + 1)(y^2 + 1) \leq (xy + x + y)^2 + 1. \quad (1)$ Thật vậy, $(1) \Leftrightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \leq x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 2xy + 1$ $\Leftrightarrow 0 \leq 2x^2y + 2xy^2 + 2xy. \quad (\text{Đúng vì } x, y \geq 0)$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $xy = 0$.	1,0
	Trở lại bài toán ban đầu, đặt $a - 1 = x, b - 1 = y, c - 1 = z$. Khi đó $x, y, z \geq 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \leq (x + 1)^2(y + 1)^2(z + 1)^2 - 2(x + 1)(y + 1)(z + 1) + 2. \quad (2)$ Áp dụng bất đẳng thức (1) cho các số không âm x, y ta được: $(x^2 + 1)(y^2 + 1) \leq (xy + x + y)^2 + 1.$ Nhân hai vế với $(z^2 + 1)$ ta được $(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \leq [(xy + x + y)^2 + 1](z^2 + 1).$	2,0

Câu	Nội dung	Điểm
	Áp dụng bất đẳng thức (1) cho các số không âm $z, xy + x + y$ ta được: $[(xy + x + y)^2 + 1](z^2 + 1) \leq [(xy + x + y)z + (xy + x + y) + z]^2 + 1.$ Chú ý rằng $[(xy + x + y)z + (xy + x + y) + z]^2 = [(x + 1)(y + 1)(z + 1) - 1]^2$, ta suy ra điều phải chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi $xy = 0$ và $z(xy + x + y) = 0$. Chẳng hạn, $x = 0, y = 1, z = 0$. Khi đó $a = 1, b = 2, c = 1$ và hai vế cùng bằng 2.	1,0
3(4,0 điểm)	Đặt $S = (ax + b)^{2024} - (cx + d)^{2024}$. Để thấy khai triển của S có tối đa 2025 hệ số. Do đó $1 \leq n \leq 2025$. Ta có: $\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{2024} C_{2024}^k (ax)^k \cdot b^{2024-k} - \sum_{k=0}^{2024} C_{2024}^k (cx)^k \cdot d^{2024-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2024} C_{2024}^k \left[\left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot b^{2024} - \left(\frac{c}{d}\right)^k \cdot d^{2024} \right] \cdot x^k. \end{aligned}$ Do đó hệ số của x^k với $k = 0, \dots, 2024$ là $H_k = C_{2024}^k \left[\left(\frac{a}{b}\right)^k \cdot b^{2024} - \left(\frac{c}{d}\right)^k \cdot d^{2024} \right].$	1,0
	• Nếu $n = 2025$, chọn $a = b = 2, c = d = 1$. Ta có: $S = (2x + 2)^{2024} - (x + 1)^{2024} \quad \text{và} \quad H_k = C_{2024}^k (2^{2024} - 1) \quad \forall k = 0, \dots, 2024.$ Khi đó S có đúng 2025 hệ số khác 0 (thỏa mãn). • Nếu $n = 2024$, chọn $a = 2, b = c = d = 1$. Ta có: $S = (2x + 1)^{2024} - (x + 1)^{2024} \quad \text{và} \quad H_k = C_{2024}^k (2^k - 1) \quad \forall k = 0, \dots, 2024.$ Khi đó $H_0 = 0$ và $H_k \neq 0$ với mọi $k = 1, \dots, 2024$. Do đó S có đúng 2024 hệ số khác 0 (thỏa mãn).	1,0
	• Nếu $1 \leq n \leq 2023$ thì tồn tại các số tự nhiên i, j ($0 \leq i < j \leq 2024$) sao cho $H_i = H_j = 0$. Ta có: $\left(\frac{ad}{bc}\right)^i = \left(\frac{ad}{bc}\right)^j = \left(\frac{d}{b}\right)^{2024} \Rightarrow \left(\frac{ad}{bc}\right)^{i-j} = 1.$ Do đó $\left \frac{ad}{bc}\right = 1$.	2,0

Câu	Nội dung	Điểm
	Nếu $\frac{ad}{bc} = 1$ thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ và $\left(\frac{d}{b}\right)^{2024} = 1$. Khi đó $H_k = 0$ với mọi $k = 0, \dots, 2024$. Vậy $n = 0$ (Loại). Nếu $\frac{ad}{bc} = -1$ thì $\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}$ và $(-1)^i = (-1)^j = \left(\frac{d}{b}\right)^{2024}$. $\forall \left(\frac{d}{b}\right)^{2024} > 0$ nên i, j là các số chẵn. Do đó $\left(\frac{d}{b}\right)^{2024} = 1$. Khi đó $H_k = C_{2024}^k \left[\left(-\frac{c}{d}\right)^k \cdot b^{2024} - \left(\frac{c}{d}\right)^k \cdot d^{2024} \right]$ $= C_{2024}^k \left[\left(-\frac{c}{d}\right)^k \cdot b^{2024} - \left(\frac{c}{d}\right)^k \cdot b^{2024} \right].$ Khi đó $H_k = 0$ với mọi k chẵn. Vậy $H_k \neq 0$ với mọi k lẻ. Do đó $n = 2012$. Vậy $n = 2012, 2024, 2025$.	
4 (4,0 điểm)	Ta cần có một bổ đề. Bổ đề. Cho tam giác ABC, D là một điểm tùy ý (khác A, B, C) và AD không vuông góc với BC. Đường trung trực của đoạn thẳng AD cắt BC tại M. Khi đó $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{AB^2 - BD^2}{AC^2 - CD^2}.$  <i>Chứng minh.</i> Gọi N là trung điểm của AD. E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của B, C trên AD. Ta có: $AB^2 - BD^2 = EA^2 - ED^2 = \overline{EA}^2 - \overline{ED}^2 = \overline{DA} \cdot (\overline{EA} + \overline{ED}) = 2\overline{DA} \cdot \overline{EN}.$ Tương tự, $AC^2 - CD^2 = 2\overline{DA} \cdot \overline{FN}$. Do đó $\frac{AB^2 - BD^2}{AC^2 - CD^2} = \frac{\overline{NE}}{\overline{NF}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}.$	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	Trở lại bài toán ban đầu.  Gọi A_0, B_0, C_0 tương ứng là giao điểm thứ hai của IA, IB, IC và đường tròn (ABC). Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm của các đường tròn $(AIA'), (BIB'), (CIC')$. Áp dụng bổ đề trên cho tam giác DB_0C_0 và điểm H, ta có: $\frac{\overline{XB_0}}{\overline{XC_0}} = \frac{DB_0^2 - HB_0^2}{DC_0^2 - HC_0^2}.$ Tương tự, $\frac{\overline{YC_0}}{\overline{YA_0}} = \frac{EC_0^2 - HC_0^2}{EA_0^2 - HA_0^2}; \frac{\overline{ZA_0}}{\overline{ZB_0}} = \frac{FA_0^2 - HA_0^2}{FB_0^2 - HB_0^2}.$ Chú ý rằng $EA_0 = FA_0; DB_0 = FB_0; EC_0 = DC_0$, suy ra $\frac{\overline{XB_0}}{\overline{XC_0}} \cdot \frac{\overline{YC_0}}{\overline{YA_0}} \cdot \frac{\overline{ZA_0}}{\overline{ZB_0}} = 1$ Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác $A_0B_0C_0$, ta có X, Y, Z thẳng hàng. Vậy các đường tròn $(AIA'), (BIB'), (CIC')$ có điểm chung khác I.	3,0
5 (2,0 điểm)	Giả sử ban đầu trên bảng có hai số x_0, y_0 với $x_0 > y_0 > 0$. Sau lần thứ n thực hiện quy tắc, gọi x_n là số lớn hơn trên bảng, y_n là số bé hơn trên bảng. Khi đó trên bảng có hai số x_n, y_n với $x_n > y_n > 0$. Trong lần thứ $(n + 1)$ thực hiện quy tắc, ta thay số y_n bởi $\frac{x_n y_n}{ x_n - y_n }$. Khi đó trên bảng có hai số $x_n, \frac{x_n y_n}{ x_n - y_n }$. - Nếu $\frac{x_n}{y_n} \geq 2$ thì $x_n - y_n \geq y_n$. Do đó $x_n \geq \frac{x_n y_n}{x_n - y_n}$. Suy ra $x_{n+1} = x_n$ và $y_{n+1} = \frac{x_n y_n}{x_n - y_n}$. Ta có: $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_n}{y_n} - 1$.	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	- Nếu $\frac{x_n}{y_n} < 2$ thì chứng minh tương tự, ta có: $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{1}{\frac{x_n}{y_n} - 1}$. Đặt $a_n = \frac{x_n}{y_n}$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó $0 < a_0 \neq 1$ và $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & \text{nếu } a_n \geq 2 \\ \frac{1}{a_n - 1} & \text{nếu } 0 < a_n < 2. \end{cases}$	
	Xét các trường hợp sau. • Nếu $a_0 = m \in \mathbb{Z}^+$ thì $m \geq 2$. Khi đó $a_1 = m - 1$. Giả sử quy tắc thực hiện được vô hạn lần. Khi đó $a_n \neq 1$ với mọi $n \geq 0$. Vì $m - 1$ là số nguyên dương và $a_1 = m - 1 \neq 1$ nên $a_1 = m - 1 \geq 2$. Khi đó $a_2 = (m - 1) - 1 = m - 2$. Suy luận tương tự, ta có $a_{m-1} = 1$. Quy tắc dừng (Mâu thuẫn). • Nếu $a_0 \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{Z}^+$. Đặt $a_k = \frac{m_k}{n_k}$ với $m_k, n_k \in \mathbb{Z}^+, (m_k, n_k) = 1$. Khi đó $\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}} = \begin{cases} \frac{m_k - n_k}{n_k} & \text{nếu } m_k \geq 2n_k \\ \frac{n_k}{m_k - n_k} & \text{nếu } m_k < 2n_k. \end{cases}$ Chú ý rằng $(m_{k+1}, n_{k+1}) = 1$ và $(m_k - n_k, n_k) = (m_k, n_k) = 1$, ta suy ra $n_{k+1} = \begin{cases} n_k & \text{nếu } m_k \geq 2n_k \\ m_k - n_k & \text{nếu } m_k < 2n_k. \end{cases}$ Do đó $n_{k+1} \leq n_k$ với mọi k. Suy ra dãy (n_k) là dãy nguyên dương không tăng. Vậy tồn tại giá trị nhỏ nhất là q ($q \in \mathbb{Z}^+$). (1) Giả sử $n_t = q$ và $a_t = \frac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{Z}^+, (p, q) = 1$. Nếu $q > 1$, ta đặt $p = sq + r$ ($0 < r < q$). Với $s = 1$ thì $p = q + r < 2q$. Khi đó $\frac{m_{t+1}}{n_{t+1}} = \frac{n_t}{m_t - n_t} = \frac{q}{p - q} = \frac{q}{r}.$ Suy ra $n_{t+1} = r < q$ (Mâu thuẫn với (1)). Vậy $s \geq 2$. Khi đó $p \geq 2q$ và $a_{t+1} = \frac{m_{t+1}}{n_{t+1}} = \frac{m_t - n_t}{n_t} = \frac{p - q}{q} = \frac{qs + r - q}{q} = \frac{q(s - 1) + r}{q}.$ Suy luận tương tự như trên ta có: $a_{t+s-1} = \frac{q + r}{q}$. Khi đó $a_{t+s} = \frac{q}{r}$ dẫn tới $n_{t+s} = r < q$ (Mâu thuẫn với (1)). Nếu $q = 1$ thì $a_t = p$. Chứng minh tương tự trường hợp trên, quy tắc dừng.	1,0

Hết