SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Hướng dẫn chấm có 7 trang)

BÌNH PHƯỚC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH THCS NĂM HỌC 2024-2025

Môn : Toán

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (5đ)

1. Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{2x+4}{x\sqrt{x}-8}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4}\right).\left(\dfrac{x\sqrt{x}+8}{4+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x=7+4\sqrt{3}$.

2. Tính $a+b$ biết $\left(a+\sqrt{a^2+2024}\right)\left(b+\sqrt{b^2+2024}\right)=2024$.

Câu 2 (5đ)

1. Một công ty vận tải dự định chở 54 tấn hàng để hưởng ứng phong trào "Hướng về Miền Trung thân yêu". Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy công ty phải bổ sung thêm 3 xe, lúc này mỗi xe chở ít hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu công ty dự định dùng bao nhiêu chiếc xe để chở hàng, biết các xe chở số tấn hàng bằng nhau.

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases}3y^2+2xy+3=4y\sqrt{x^2+3} & (1)\\ y\left(y-x\right)=3-3y & (2)\end{cases}$

3. Cho Parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=mx+4$ (với m là tham số).

a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt .

b) Gọi x_1,x_2 là hoành độ giao điểm của (P) và (d). Tìm m để

$$T=\frac{2mx_1-x_1x_2+2mx_2+3}{{x_1}^2+{x_2}^2}$$ nhận giá trị nguyên.

Câu 3 (5đ)

Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cùng nữa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tiếp tuyến Ax,By của (O) và lấy điểm C sao cho $CA<CB$. Trên đoạn OA lấy điểm D (D khác O,A). Đường thẳng vuông góc với CD tại C cắt Ax,By lần lượt tại E và F. Đoạn thẳng AC cắt DE tại G, BC cắt DF tại H, OC cắt GH tại I. Gọi J,K lần lượt là trung điểm của DE,DF.

a) Chứng minh ΔAGE đồng dạng ΔFHC.

b) Chứng minh I là trung điểm của GH và I,J,K thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của JO và DK. Chứng minh ΔJOK vuông và DE, IM, KO đồng quy.

Câu 4 (2đ)

Cho nữa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. M là điểm di động trên nữa đường tròn (M không trùng với A,B). Qua M kẻ tiếp tuyến với nữa đường tròn. Gọi D,C lần lượt là hình chiếu của A,B trên tiếp tuyến ấy. Xác định vị trí của M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất.

Câu 5 (3đ)

1. Cho các số $a,b,c \in [0;1]$. Chứng minh :

$\sqrt{4a^2-4a^2b^2}+\sqrt{16b^2-12b^2c^2}+\sqrt{6c^2-3c^2a^2} \le 5.$

2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn phương trình :

$3(x^2+2y^2-1)-4(xy+2y)=0.$

HẾT

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Hướng dẫn chấm có 7 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
CẤP TỈNH THCS NĂM HỌC 2024-2025

Môn : Toán

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi : 09/03/2024

BÌNH PHƯỚC

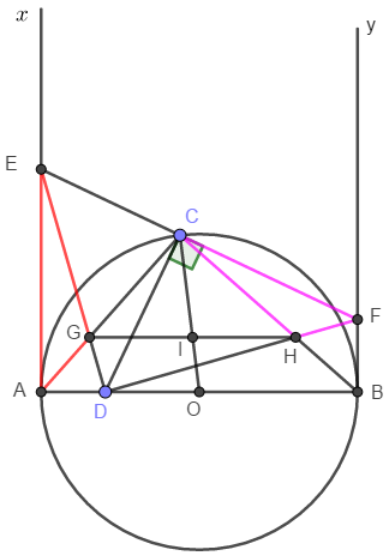
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	ĐÁP ÁN	Thang điểm
Câu 1 (5.0 đ).	**1.** Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{2x+4}{x\sqrt{x}-8}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4}\right).\left(\dfrac{x\sqrt{x}+8}{4+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$. a) Rút gọn biểu thức P.	**2.25đ**
	a) Điều kiện: $\begin{cases}x\geq 0\\ x\sqrt{x}-8\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x\neq 4\end{cases}$.	**0.5**
	Khi đó ta có : $P=\left(\dfrac{2x+4}{\sqrt{x^3}-2^3}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+4}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x^3}+2^3}{4+2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$	**0.5**
	$=\dfrac{2x+4-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}.\left[\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x-2\sqrt{x}+4\right)}{2\left(2+\sqrt{x}\right)}-\sqrt{x}\right]$	**0.5**
	$=\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(x+2\sqrt{x}+4\right)}.\left(\dfrac{x-2\sqrt{x}+4}{2}-\sqrt{x}\right)$	**0.25**
	$=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{x-4\sqrt{x}+4}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}.\dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{2}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2}$	**0.5**
	b) Tính giá trị của P khi $x=7+4\sqrt{3}$.	**0.75**

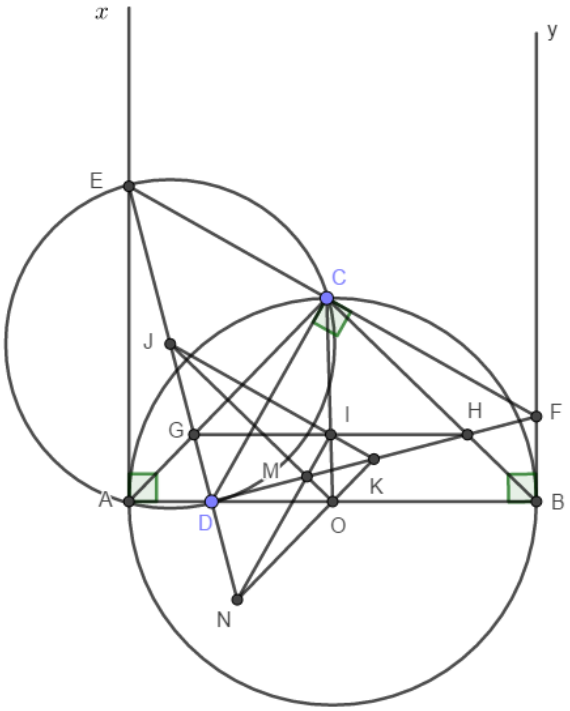
	Khi $x=7+4\sqrt{3}$ ta có $P=\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}-2}{2}=\dfrac{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}-2}{2}$ $=\dfrac{2+\sqrt{3}-2}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**0.5** **0.25**
	2. Tính $a+b$ biết $\left(a+\sqrt{a^2+2024}\right)\left(b+\sqrt{b^2+2024}\right)=2024$.	**2đ**
	Ta có : $\left(\sqrt{a^2+2024}+a\right)\left(\sqrt{a^2+2024}-a\right)=a^2+2024-a^2=2024$.	**0.5**
	Kết hợp với giả thiết ta suy ra $\sqrt{a^2+2024}-a=\sqrt{b^2+2024}+b$	**0.5**
	Tương tự ta cũng có : $\sqrt{b^2+2024}-b=\sqrt{a^2+2024}+a$	**0.5**
	$\Rightarrow \sqrt{b^2+2024}-b+\sqrt{a^2+2024}-a=\sqrt{a^2+2024}+a+\sqrt{b^2+2024}+b$ $\Rightarrow a+b=0$	**0.5**
Câu 2 (5.0 đ).	**1.** Một công ty vận tải dự định chở 54 tấn hàng để hưởng ứng phong trào "Hướng về Miền Trung thân yêu". Nhưng khi chuẩn bị khởi hành thì số hàng hóa đã tăng thêm 6 tấn so với dự định. Vì vậy công ty phải bổ sung thêm 3 xe, lúc này mỗi xe chở ít hơn dự định 1 tấn hàng. Hỏi ban đầu công ty dự định dùng bao nhiêu chiếc xe để chở hàng, biết các xe chở số tấn hàng bằng nhau.	**1.5đ**
	Gọi x (chiếc) là số xe dự định của công ty $\left(x\in\mathbb{N}^*, x<54\right)$	**0.25**
	Số xe tham gia vận chuyển là $x+3$ (chiếc) Số tấn hàng trên mỗi chiếc theo dự định $\dfrac{54}{x}$. Số tấn hàng trên mỗi chiếc thực tế $\dfrac{60}{x+3}$.	**0.25**
	Theo bài ra ta có phương trình: $\dfrac{54}{x}-\dfrac{60}{x+3}=1$	**0.5**

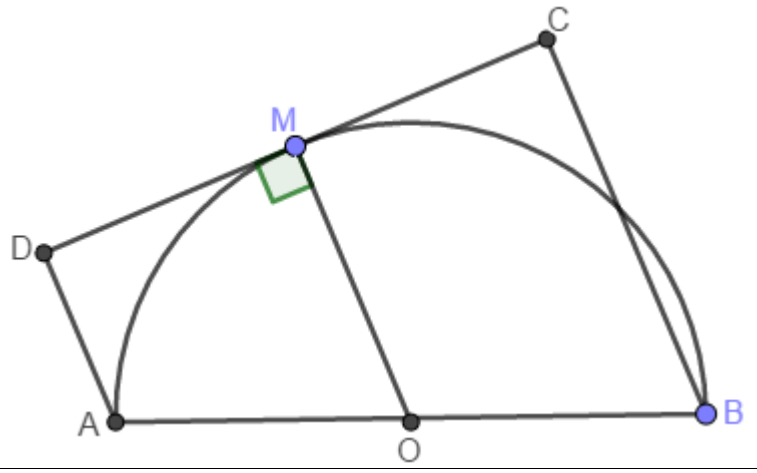
	$\Leftrightarrow 54(x+3)-60x=x(x+3)\Leftrightarrow x^2+9x-162=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \ \ (n) \\ x=-18(l) \end{array}\right.$. Vậy lúc đầu công ty có 9 chiếc xe.	**0.5**
	2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 3y^2+2xy+3=4y\sqrt{x^2+3} \ \ (1) \\ y(y-x)=3-3y \qquad\quad (2) \end{cases}$	**2đ**
	Phương trình (1) tương đương: $4y^2-4y\sqrt{x^2+3}+x^2+3=x^2-2xy+y^2$	**0.25**
	$\Leftrightarrow \left(2y-\sqrt{x^2+3}\right)^2=(x-y)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+3}=3y-x \\ \sqrt{x^2+3}=x+y \end{array}\right.$	**0.25**
	TH1: $\sqrt{x^2+3}=3y-x$. Kết hợp với (2) ta có hệ $\begin{cases} 3y\geq x \\ 6xy=9y^2-3 \\ xy=y^2+3y-3 \end{cases}$.	**0.25**
	$\Rightarrow 9y^2-3=6\left(y^2+3y-3\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1;x=1 \ \ (TM) \\ y=5;x=\dfrac{37}{5}(TM) \end{array}\right.$	**0.5**
	TH2: $\sqrt{x^2+3}=x+y$. Kết hợp với (2) ta có : $\begin{cases} x+y\geq 0 \\ 2xy=-y^2+3 \\ xy=y^2+3y-3 \end{cases}$	**0.25**
	$\Rightarrow -y^2+3=2\left(y^2+3y-3\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1;x=1 \ (TM) \\ y=-3;x=1(L) \end{array}\right.$ Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;1),\left(\dfrac{37}{5};5\right)$.	**0.5**
	3. Cho Parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $(d):y=mx+4$ (với m là tham số). a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt .	**0.5đ**

	Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$.	**0.25**
	Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, với mọi m nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt, suy ra đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.	**0.25**
	b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (P) và (d). Tìm m để $T = \dfrac{2mx_1 - x_1x_2 + 2mx_2 + 3}{{x_1}^2 + {x_2}^2}$ nhận giá trị nguyên.	**1.0**
	Theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -4 \end{cases}$	**0.25**
	Khi đó $T = \dfrac{2m(x_1 + x_2) - x_1x_2 + 3}{{x_1}^2 + {x_2}^2} = \dfrac{2m^2 + 7}{m^2 + 8}$	**0.25**
	$T = 2 - \dfrac{9}{m^2 + 8} \Rightarrow T \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m^2 + 8 \in U(9)$	**0.25**
	Mà $m^2 + 8 \geq 8, \forall m \Rightarrow m^2 + 8 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 1$.	**0.25**
Câu 3 (5.0 đ).	Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cùng nữa mặt phẳng bờ AB, vẽ các tiếp tuyến Ax, By của (O) và lấy điểm C sao cho $CA < CB$. Trên đoạn OA lấy điểm D (D khác O, A). Đường thẳng vuông góc với CD tại C cắt Ax, By lần lượt tại E và F. Đoạn thẳng AC cắt DE tại G, BC cắt DF tại H, OC cắt GH tại I. Gọi J, K lần lượt là trung điểm của DE, DF. a) Chứng minh ΔAGE đồng dạng ΔFHC.	**1.5đ**



	Ta có $CAE = ABC$ (cùng chắn AC)	**0.25**
	Tứ giác $CDBF$ nội tiếp $\Rightarrow ABC = CFD$ (cùng chắn CD) $\Rightarrow CAE = CFD$ (1)	**0.5**
	Tứ giác $ADCE$ nội tiếp $\Rightarrow AED = ACD$ (cùng chắn AD)	**0.25**
	Mà $ACD = BCF$ (cùng phụ BCD) $\Rightarrow AED = BCF$ (2)	**0.25**
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta AGE \backsim \Delta FHC$	**0.25**
	b) Chứng minh I là trung điểm của GH và I, J, K thẳng hàng.	**2.0đ**

	 Ta có $CGD = AGE = CHF \Rightarrow$ Tứ giác $CGDH$ nội tiếp $\Rightarrow CGH = CDH$ Mà $CDH = CBF$ (Tứ giác $CDBF$ nội tiếp) $\Rightarrow CGH = CBF$	**0.25** **0.25**
	Mà $CBF = CAB \Rightarrow CGH = CAB \Rightarrow GH // \text{AB} \Rightarrow \dfrac{GI}{OA} = \dfrac{IH}{OB}$ Vì $OA = OB$ nên $IG = IH \Rightarrow I$ là trung điểm của GH	**0.25** **0.25**
	Vì I, J lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $CGDH, ADCE$ nên $IJ \perp CD$	**0.5**
	Vì J, K lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác $ADCE, BDCF$ nên $JK \perp CD$ $\Rightarrow I, \text{J}, \text{K}$ thẳng hàng	**0.5**
	c) Gọi M là giao điểm của JO và DK. Chứng minh ΔJOK vuông và DE, IM, KO đồng quy.	**1.5đ**

	Ta có J là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADCE \Rightarrow OJ \perp AC \Rightarrow OJ // BC$ (do $BC \perp AC$) Mặt khác $\begin{cases} JE = JD \\ KF = KD \end{cases} \Rightarrow JK // EF$ (tính chất đường trung bình) Do đó $MJK = BCF$ Mà Tứ giác $BDCF$ nội tiếp $\Rightarrow BCF = BDF$ (cùng chắn BF) $\Rightarrow MJK = BDF = ODK \Rightarrow$ Tứ giác $JDOK$ nội tiếp $\Rightarrow JOK = JDK$ Mà $JDK = 90^0$ (do $CGDH$ nội tiếp và $GCH = 90^o$) $\Rightarrow JOK = 90^0 \Rightarrow \Delta JOK$ vuông tại O. Gọi N là giao điểm của ED và OK Ta có M là trực tâm ΔJNK nên $NM \perp JK$ (3) $MOI = JOC = OCB = OBC = CFD$ (vì $OJ // BC$) Mà $CFD = IKD$ $(JK // EF)$ $\Rightarrow MOI = IKM \Rightarrow$ Tứ giác $IMOK$ nội tiếp $\Rightarrow IM \perp JK$ (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow DE, IM, KO$ đồng quy	**0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25** **0.25**
Câu 4 (2.0 đ).	Cho nữa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. M là điểm di động trên nữa đường tròn (M không trùng với A,B). Qua M kẻ tiếp tuyến với nữa đường tròn. Gọi D,C lần lượt là hình chiếu của A,B trên tiếp tuyến ấy. Xác định vị trí của M để tứ giác $ABCD$ có diện tích lớn nhất.	**2.0đ**
		

	Ta có $AD \perp DC, BC \perp DC \Rightarrow AD // BC$ $\Rightarrow ABCD$ là hình thang mà $ADC = 90^0$ nên $ABCD$ là hình thang vuông.	**0.25**
	$OM \perp DC \Rightarrow OM // AD$ mà O là trung điểm AB nên $OM = \dfrac{AD+BC}{2}$.	**0.25**
	Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{AD+BC}{2}.DC = OM.DC = R.DC$	**0.25**
	Vì $ABCD$ là hình thang vuông nên $DC \le AB$. Vậy $S_{ABCD} \le R.AB = 2R^2$	**0.75**
	Dấu bằng xảy ra khi $DC = AB$.Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.	**0.25**
	$\Rightarrow CD // AB$. Vậy M nằm chính giữa AB.	**0.25**
Câu 5 (3.0 đ).	**1.** Cho các số $a,b,c \in [0;1]$. Chứng minh : $\sqrt{4a^2-4a^2b^2}+\sqrt{16b^2-12b^2c^2}+\sqrt{6c^2-3c^2a^2} \le 5$.	**1.5đ**
	Ta có $\sqrt{4a^2-4a^2b^2} = a.\sqrt{4-4b^2} \le \dfrac{a^2+4-4b^2}{2}$;	**0.25**
	$\sqrt{16b^2-12b^2c^2} = 2b\sqrt{4-3c^2} \le \dfrac{4b^2+4-3c^2}{2}$;	**0.25**
	$\sqrt{6c^2-3c^2a^2} = \sqrt{3}c\sqrt{2-a^2} \le \dfrac{3c^2+2-a^2}{2}$.	**0.25**
	Cộng vế theo vế ta có : $a\sqrt{4-4b^2}+b\sqrt{16-12c^2}+c\sqrt{6-3a^2}$ $\le \dfrac{a^2+4-4b^2}{2}+\dfrac{4b^2+4-3c^2}{2}+\dfrac{3c^2+2-a^2}{2} = 5.$	**0.25**
	Dấu bằng xãy ra khi: $\begin{cases}\sqrt{4-4b^2}=a\\ \sqrt{4-3c^2}=2b\\ \sqrt{2-a^2}=\sqrt{3}c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4-4b^2=a^2\\ 4-3c^2=4b^2\\ 2-a^2=3c^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2=1\\ b^2=\dfrac{3}{4}\\ c^2=\dfrac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}.$	**0.5**

	2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn phương trình : $3\left(x^2+2y^2-1\right)-4(xy+2y)=0$.	**1.5đ**
	Xét phương trình : $3\left(x^2+2y^2-1\right)-4(xy+2y)=0$ $\Leftrightarrow 3x^2+6y^2-3-4xy-8y=0$ $\Leftrightarrow 2x^2-4xy+2y^2+x^2+4y^2-8y-3=0$ $\Leftrightarrow 2(x-y)^2+x^2+4(y-1)^2=7$	**0.25** **0.25**
	$\Rightarrow 4(y-1)^2\le 7\Rightarrow \lvert y-1\rvert\le\frac{7}{4}\Rightarrow y\in\{0,1,2\}$	**0.25**
	+ Với $y=0\Rightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow x=\pm 1$. + Với $y=1\Rightarrow 3\left(x^2+1\right)-4(x+2)=0\Leftrightarrow 3x^2-4x-5=0$. Phương trình này không có nghiệm nguyên.	**0.25** **0.25**
	+ Với $y=2\Rightarrow 3\left(x^2+7\right)-4(2x+4)=0\Leftrightarrow 3x^2-8x+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{5}{3}(l)\end{array}\right.$ Vậy các cặp số nguyên (x,y) cần tìm là $(1,0);(-1,0);(1;2)$.	**0.25**

Lưu ý : *Học sinh làm theo phương án khác nếu đúng cũng đạt điểm tối đa*