

Câu 1. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x + y = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 2x^2 - 11y + 32 = 3\sqrt[3]{4y-8} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định như sau:
$$\begin{cases} u_1 = 2023 \\ u_{n+1} = \frac{2022u_n^3 + 2022u_n}{2022u_n^2 - u_n + 2022}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2}$.

Câu 3. (5,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Xét một điểm C trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC không cân tại C . Gọi (O_1) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại C ; (O_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại C . Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại điểm thứ hai là D (D khác C).

a) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng OD tại S . Chứng minh OA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADS .

b) Chứng minh đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C di động trên đường tròn (O) (tam giác ABC không cân tại C).

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Cho k là số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh $2^{k-1} + 1$ không chia hết cho k .

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p và q thỏa mãn $2^p + 2^q$ chia hết cho $p \cdot q$.

Câu 5. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ và } x \neq 0.$$

Câu 6. (2,0 điểm) Cho tập hợp X có 2023 phần tử. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn hai tập hợp con khác nhau của X sao cho giao của hai tập hợp này là một tập hợp có đúng một phần tử?

Câu 7. (3,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $y^2 \geq zx, z^2 \geq xy$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$P = \frac{z}{z+y} + \frac{y}{y+x} + \frac{2022z^{2023}}{z^{2023} + x^{2023}}.$$

----- HẾT -----

* Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay; cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

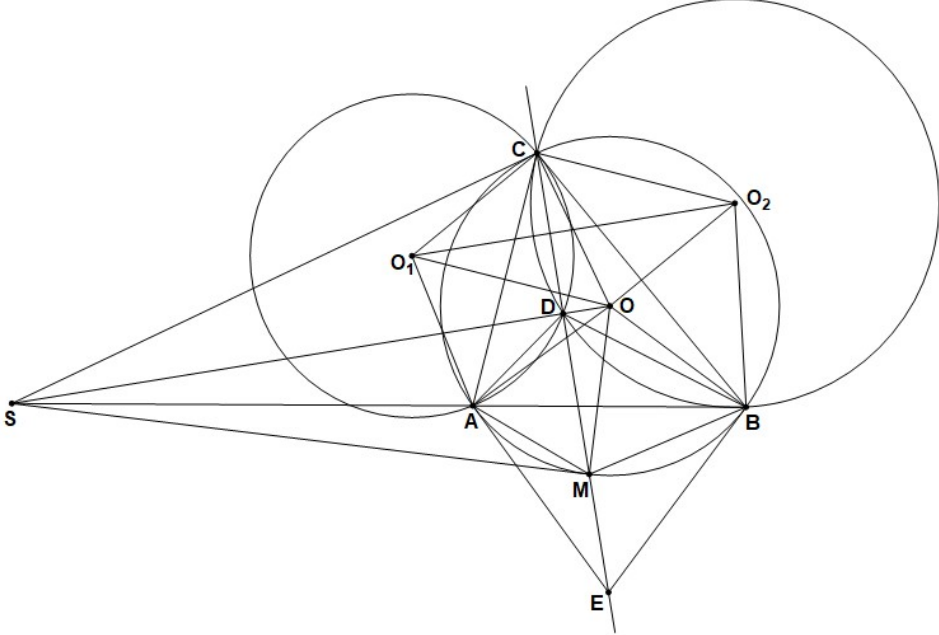
* Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN
Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm này gồm có 08 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + x + y = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \\ 2x^2 - 11y + 32 = 3\sqrt[3]{4y-8} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$	
	Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$	0,25
	- Xét phương trình thứ nhất của hệ: $x^2 - y^2 + x + y = \sqrt{y-1} - \sqrt{x} \Leftrightarrow (x+y)(x-y+1) + (\sqrt{x} - \sqrt{y-1}) = 0 (*)$	0,25
	* Khi $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ không thỏa phương trình thứ hai.	0,25
	* Khi $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} > 0$: Phương trình (*) tương đương với phương trình: $(x+y)(x-y+1) + \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y-1})(\sqrt{x} + \sqrt{y-1})}{\sqrt{x} + \sqrt{y-1}} = 0$ $\Leftrightarrow (x-y+1) \left(x+y + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y-1}} \right) = 0 (**)$	0,25
Câu 1 (3,0đ)	Để ý rằng $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x+y + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y-1}} > 0$ (với $\sqrt{x} + \sqrt{y-1} > 0$) Vì thế phương trình (**) tương đương với phương trình: $x-y+1=0 \Leftrightarrow y=x+1$	0,25
	Thay $y=x+1$ vào phương trình thứ hai ta được : $2x^2 - 11x + 21 = 3\sqrt[3]{4x-4} \quad (1)$ $\Leftrightarrow 3(\sqrt[3]{4x-4} - 2) - (2x-5)(x-3) = 0$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \frac{(\sqrt[3]{4x-4})^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{4x-4})^2 + 2\sqrt[3]{4x-4} + 2^2} - (2x-5)(x-3) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{12}{(\sqrt[3]{4x-4})^2 + 2\sqrt[3]{4x-4} + 4} = 2x-5 \end{cases}$	0,25
	- Xét phương trình: $\frac{12}{(\sqrt[3]{4x-4})^2 + 2\sqrt[3]{4x-4} + 4} = 2x-5 \quad (I)$ Đặt $t = \sqrt[3]{4x-4}$. Khi đó phương trình (I) trở thành: $\frac{12}{t^2 + 2t + 4} = \frac{1}{2}t^3 - 3 \quad (II)$ Từ phương trình (I) suy ra $2x-5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2} \Rightarrow t = \sqrt[3]{4x-4} > \sqrt[3]{6}$.	0,25 0,25
	Xét $f(t) = \frac{12}{t^2 + 2t + 4}$ với $t > \sqrt[3]{6}$, $f'(t) = \frac{-12(t^2 + 2t + 2)'}{(t^2 + 2t + 4)^2} = \frac{-24(t+1)}{(t^2 + 2t + 4)^2} < 0, \forall t > \sqrt[3]{6}$ Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(\sqrt[3]{6}; +\infty)$.	0,25

	Xét $g(t) = \frac{1}{2}t^3 - 3$, $g'(t) = \frac{3}{2}t^2 > 0$, $\forall t > \sqrt[3]{6}$. Suy ra $g(t)$ đồng biến trên $(\sqrt[3]{6}; +\infty)$.	0,25
	Mà $f(2) = g(2)$. Do đó pt (II) có nghiệm duy nhất $t = 2$.	0,25
	+ Với $t = 2 \Rightarrow x = 3, y = 4$.	0,25
	Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: $(x; y) = (3; 4)$.	
Câu 2 (2,0đ)	Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2023 \\ u_{n+1} = \frac{2022u_n^3 + 2022u_n}{2022u_n^2 - u_n + 2022}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2}$.	
	- Nhận xét: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
	$u_{n+1} = \frac{2022u_n^3 + 2022u_n}{2022u_n^2 - u_n + 2022} \Leftrightarrow 2022u_{n+1}u_n^2 - u_n.u_{n+1} + 2022u_{n+1} = 2022u_n(1+u_n^2)$ $\Leftrightarrow 2022u_{n+1}(1+u_n^2) - u_n.u_{n+1} = 2022u_n(1+u_n^2) \quad (*)$ + Chia hai vế của (*) cho: $u_n.u_{n+1}(1+u_n^2)$ ta được: $2022 \cdot \frac{1}{u_n} - \frac{1}{1+u_n^2} = 2022 \cdot \frac{1}{u_{n+1}} \Leftrightarrow -\frac{1}{1+u_n^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right)$ $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+u_n^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) + 1 \Leftrightarrow \frac{u_n^2}{1+u_n^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) + 1$	0,5
	Mà $\frac{u_n^2}{1+u_n^2} < 1 \Rightarrow 2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) + 1 < 1 \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} < \frac{1}{u_n}$. Do đó dãy số $\left(\frac{1}{u_n} \right)$ giảm và bị chặn dưới bởi số 0. Suy ra dãy số $\left(\frac{1}{u_n} \right)$ có giới hạn.	0,25
	Đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = a$. Mặt khác $\frac{u_n^2}{1+u_n^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{u_n} \right)^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) + 1$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{u_n} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) + 1 \right] \Rightarrow \frac{1}{1+a^2} = 2022(a-a) + 1 \Rightarrow a = 0.$	0,25
	Lại có: $\frac{u_i^2}{1+u_i^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_{i+1}} - \frac{1}{u_i} \right) + 1$. Cho i chạy từ 1 đến n , ta có: $\frac{u_1^2}{1+u_1^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_1} \right) + 1$ $\frac{u_2^2}{1+u_2^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_3} - \frac{1}{u_2} \right) + 1$ $\frac{u_3^2}{1+u_3^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_4} - \frac{1}{u_3} \right) + 1$	0,25

$\frac{u_n^2}{1+u_n^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right) + 1$	
Cộng vế theo vế các đẳng thức trên suy ra: $\sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_1} \right) + n$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2} = 2022 \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{2023} \right) + n \Rightarrow \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2} = \frac{2022}{2n+1} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{2023} \right) + \frac{n}{2n+1}$	0,25
$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{2022}{2n+1} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{2023} \right) + \frac{n}{2n+1} \right]$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2} = 0 \left(0 - \frac{1}{2023} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$	0,25
* Cách khác: Nhận xét: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
Suy ra $u_{n+1} - u_n = \frac{2022u_n^3 + 2022u_n}{2022u_n^2 - u_n + 2022} - u_n = \frac{u_n^2}{2022u_n^2 - u_n + 2022} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó dãy (u_n) là dãy tăng.	0,25
Giả sử (u_n) bị chặn trên. Suy ra tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \geq 2023$ (do $u_n \geq u_1 = 2023, \forall n \in \mathbb{N}^*$). Từ $u_{n+1} = \frac{2022u_n^3 + 2022u_n}{2022u_n^2 - u_n + 2022}$ suy ra $a = \frac{2022a^3 + 2022a}{2022a^2 - a + 2022}$ $\Leftrightarrow -a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (vô lý). Điều này chứng tỏ (u_n) không bị chặn trên. Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.	0,5
Đặt $v_n = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2}$ và $x_n = 2n+1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có dãy (x_n) tăng và không bị chặn trên. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1} - v_n}{x_{n+1} - x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{u_i^2}{1+u_i^2} - \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2}}{2(n+1) + 1 - (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{u_{n+1}^2}{1+u_{n+1}^2}}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{u_{n+1}^2} + 1} = \frac{1}{2}.$	0,5
Theo định lý Stolz, suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1} - v_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{1}{2}.$	0,25
Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2} = \frac{1}{2}.$	0,25

Câu 3 (5,0đ)	Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định nằm trên đường tròn (O) sao cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Xét một điểm C trên đường tròn (O) sao cho tam giác ABC không cân tại C. Gọi (O_1) là đường tròn đi qua A và tiếp xúc với BC tại C; (O_2) là đường tròn đi qua B và tiếp xúc với AC tại C. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại điểm thứ hai là D (D khác C). a) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt đường thẳng OD tại S. Chứng minh OA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADS. b) Chứng minh đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C di động trên đường tròn (O) (tam giác ABC không cân tại C).	
a (1,5đ)	 Hình vẽ phục vụ câu a: 0,25 (Học sinh không vẽ hình – không chấm)	
	$O_1C \perp CB, O_2C \perp CB \Rightarrow O_1C \parallel O_2C$ Tương tự $O_2C \parallel O_1C$. Suy ra tứ giác OO_1CO_2 là hình bình hành. Do đó O_1O_2 đi qua trung điểm của OC.	0,5
	Mà O_1O_2 đi qua trung điểm của CD nên $O_1O_2 \parallel OD$. Mà $O_1O_2 \perp CD$ nên $\widehat{ODC} = 90^\circ$.	0,5
	Suy ra $OD \cdot OS = OC^2 = OA^2$. Suy ra OA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADS.	0,25
	$\widehat{ADC} = \frac{1}{2}(2\pi - \widehat{AO_1C}) \Leftrightarrow \widehat{ADC} + \frac{1}{2}\widehat{AO_1C} = \pi \Rightarrow (DA, DC) \equiv \frac{1}{2}(O_1A, O_1C) \pmod{\pi}$ Tương tự $(DC, DB) \equiv \frac{1}{2}(O_2C, O_2B) \pmod{\pi}$	0,5
b (3,5đ)	$(\widehat{ACB} + \widehat{ACO_1}) + (\widehat{ACB} + \widehat{BCO_2}) = 90^\circ + 90^\circ \Rightarrow 2\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ACO_1} - \widehat{BCO_2}$ $\Rightarrow 2\widehat{ACB} = 180^\circ - \left(\frac{180^\circ - \widehat{AO_1C}}{2}\right) - \left(\frac{180^\circ - \widehat{CO_2B}}{2}\right) \Rightarrow \widehat{AO_1C} + \widehat{CO_2B} = 4\widehat{ACB}$ $\Rightarrow (O_1A, O_1C) + (O_2C, O_2B) \equiv 4(CA, CB) \pmod{\pi}$	0,5
	Do đó: $(DA, DB) \equiv (DA, DC) + (DC, DB) \equiv \frac{(O_1A, O_1C) + (O_2C, O_2B)}{2} \equiv 2(CA, CB) \equiv (OA, OB) \pmod{\pi}$ Suy ra 4 điểm A, D, O, B cùng nằm trên một đường tròn.	0,5

	* Cách khác: Gọi M là giao điểm của tia CD và đường tròn (O). $\widehat{ADM} = \frac{1}{2}sd \widehat{AC} = \widehat{ACB}, \quad \widehat{BDM} = \frac{1}{2}sd \widehat{BC} = \widehat{ACB}$ (Đúng một trong hai ý được 0,5)	0,75	
	Suy ra $\widehat{ADB} = \widehat{ADM} + \widehat{MDB} = 2\widehat{ACB}$	0,25	
	Mà $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$ nên $\widehat{ADB} = \widehat{AOB}$	0,25	
	Suy ra 4 điểm A, D, O, B cùng nằm trên một đường tròn.	0,25	
	+ Ta thấy OD, AB , tiếp tuyến của (O) tại C là các trục đẳng phương của từng cặp đường tròn $(ADOB)$ và (COD) , (O) và $(ADOB)$, (O) và (COD) . Do đó 3 đường trên đồng quy tại S .	0,75	
	+ Đường đối cực của S đối với (O) đi qua C và vuông góc với OD nên CD là đường đối cực của S đối với (O) .	0,5	
	Mà AB đi qua cực S của CD đối với (O) nên CD đi qua cực E của AB đối với (O) .	0,5	
	Hơn nữa A, B và (O) cố định nên E cố định. Vậy CD đi qua E cố định.	0,25	
	* Lưu ý: Ta có $SO \perp MC$ nên SM là tiếp tuyến của đường tròn (O). Mà S nằm trên đường chéo AB nên tứ giác $AMBC$ là tứ giác điều hòa.	0,5	
	Suy ra giao điểm E của hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và B nằm trên đường chéo CM .	0,5	
	Hơn nữa A, B và (O) cố định nên E cố định. Vậy CD đi qua E cố định.	0,25	
Câu 4 (2,0đ)	a) Cho k là số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh $2^{k-1} + 1$ không chia hết cho k. b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p và q thỏa mãn $2^p + 2^q$ chia hết cho $p.q$.		
	Giả sử $2^{k-1} + 1 : k$. Suy ra k là số tự nhiên lẻ. Khi đó k có dạng $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_r^{\alpha_r}$, với $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ là các số nguyên tố lẻ, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r$ là các số nguyên dương và $r \geq 1$.	0,25	
	+ Do p_i là số nguyên tố lẻ nên $p_i - 1 = 2^{m_i} \cdot t_i$ (t_i là số tự nhiên lẻ ; $i = 1, 2, 3, \dots, r$). Không mất tính tổng quát, gọi m_1 là số nhỏ nhất trong các dãy $m_1, m_2, m_3, \dots, m_r$. Ta có $p_i - 1 = 2^{m_i} \cdot t_i : 2^{m_i} \Rightarrow p_i - 1 \equiv 0 \pmod{2^{m_i}} \Rightarrow p_i \equiv 1 \pmod{2^{m_i}}$ $\Rightarrow p_i^{\alpha_i} \equiv 1 \pmod{2^{m_i}}$.	0,25	
a (1,0đ)	Mà $k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \dots p_r^{\alpha_r}$ nên $k - 1 = 2^{m_1} \cdot u$ (với u số nguyên dương). Lại có $2^{k-1} + 1 : k \Rightarrow 2^{k-1} \equiv -1 \pmod{k}$. Do đó $2^{2^{m_1} \cdot u} \equiv -1 \pmod{k}$.	0,25	
	Hơn nữa $p_1 - 1 = 2^{m_1} \cdot t_1$ và t_1 lẻ nên $2^{(p_1-1)u} = \left(2^{2^{m_1} \cdot u} \right)^{t_1} \equiv -1 \pmod{k} \Rightarrow 2^{(p_1-1)u} \equiv -1 \pmod{p_1} \quad (*)$ Mà $2^{p_1-1} \equiv 1 \pmod{p_1} \Rightarrow 2^{(p_1-1)u} \equiv 1 \pmod{p_1}$ (mâu thuẫn với (*)). Vậy $2^{k-1} + 1$ không chia hết cho k.	0,25	
b (1,0đ)	Khi $2^p + 2^q$ chia hết cho $p.q$, có 3 trường hợp xảy ra : - TH1: p, q là các số nguyên tố lẻ. Vì $2^p + 2^q$ chia hết cho $p.q$ nên $2^p + 2^q \equiv 0 \pmod{p.q} \Rightarrow 2^p + 2^q \equiv 0 \pmod{p}$. Lại có $2^p \equiv 2 \pmod{p} \Rightarrow 2^q \equiv -2 \pmod{p}$ $\Rightarrow 2^{pq} \equiv (-2)^p \pmod{p} \Rightarrow 2^{pq} \equiv -2 \pmod{p}$	0,25	

	Tương tự ta chứng minh được $2^{pq} \equiv -2 \pmod{q}$. Mà p, q là các số nguyên tố nên $2^{pq} \equiv -2 \pmod{pq} \Rightarrow 2^{pq-1} \equiv -1 \pmod{pq}$ (Mâu thuẫn ở câu a).	0,25
	- TH2: $p = 2, q > 2$. $2^p + 2^q \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 4 + 2^q \equiv 0 \pmod{q}$ mà $2^q - 2 \equiv 0 \pmod{q}$. Suy ra $6 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow q = 3$.	0,25
	- TH3: $p = q = 2$. Khi đó $2^2 + 2^2 = 8 \equiv 0 \pmod{4}$ Vậy, các cặp số cần tìm là $(p; q) = (2; 2), (p; q) = (2; 3), (p; q) = (3; 2)$.	0,25
	* Cách khác: $2^p + 2^q : pq \Rightarrow 2^p + 2^q \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (2^p - p) + (2^q + p) \equiv 0 \pmod{p}$ Mà $2^p - p \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^q + p \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow 2^q \equiv 0 \pmod{p}$	0,25
	Tương tự $2^p \equiv 0 \pmod{q}$. Mà $(p, q) = 1$ nên $2^p \cdot 2^q \equiv 0 \pmod{pq} \Rightarrow 2^{p+q} : pq$ Suy ra pq là số chẵn. Khi đó, xảy ra 2 trường hợp:	0,25
	- TH1: Trong hai số p, q, có đúng một số bằng 2. Khi $p = 2$, ta có: $2^p + 2^q \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow 4 + 2^q \equiv 0 \pmod{q}$ mà $2^q - 2 \equiv 0 \pmod{q}$. Suy ra $6 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow q = 3$. Tương tự $q = 2$. Suy ra $p = 3$	0,25
	- TH2: $p = q = 2$. Khi đó $2^2 + 2^2 = 8 \equiv 0 \pmod{4}$ (thỏa) Vậy, các cặp số cần tìm là $(p; q) = (2; 2), (p; q) = (2; 3), (p; q) = (3; 2)$.	0,25
Câu 5 (3,0đ)	Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ và } x \neq 0$.	
	Giả sử tồn tại hàm f thỏa mãn yêu cầu bài toán. - Cho $x = 2, y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. - Cho $x = 1, y = 1 \Rightarrow f(1) = 0$. - Cho $x = -1, y = 1 \Rightarrow f(-1) = 0$.	0,5
	- Với $x = a (a \neq 0), y = 1$ ta có: $af(1) - f(a) = f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a), \forall a \neq 0$.	0,5
	- Xét $a, b \notin \{-1; 0; 1\}$ + Với $(x; y) = \left(\frac{1}{a}; b\right)$ ta có: $\frac{1}{a}f(b) - bf\left(\frac{1}{a}\right) = f(ab)$ + Với $(x; y) = \left(\frac{1}{b}; a\right)$ ta có: $\frac{1}{b}f(a) - af\left(\frac{1}{b}\right) = f(ab)$	0,5
	Suy ra: $\frac{1}{a}f(b) - bf\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{b}f(a) - af\left(\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{a}f(b) - b[-f(a)] = \frac{1}{b}f(a) - a[-f(b)]$ $\Leftrightarrow \frac{f(a)}{a - \frac{1}{a}} = \frac{f(b)}{b - \frac{1}{b}}$	0,5
	$\Rightarrow f(x) = c\left(x - \frac{1}{x}\right)$, với $c \in \mathbb{R}$ (thỏa: $f(-1) = 0, f(1) = 0$).	0,25

	- Thử lại: Với $x, y \neq 0$, $f(x) = c\left(x - \frac{1}{x}\right)$ thay vào $xf(y) - yf(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ta được : $xc\left(y - \frac{1}{y}\right) - yc\left(x - \frac{1}{x}\right) = c\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) \text{ (luôn đúng với mọi } c).$ (Phải có phép thử lại)	0,5
	Vậy hàm số cần tìm là: $f(x) = c\left(x - \frac{1}{x}\right)$, với $x \neq 0$, c là hằng số, $f(0) = 0$.	0,25
	Cho tập hợp X có 2023 phần tử. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn hai tập hợp con khác nhau của X sao cho giao của hai tập hợp này là một tập hợp có đúng một phần tử?	
	Giả sử giao của hai tập hợp thỏa yêu cầu là tập hợp $\{a\}$. Ta đếm số cách chọn hai tập hợp A, B con của $X \setminus \{a\}$ và không giao nhau. Có hai trường hợp xảy ra : - TH1: Hai tập hợp A, B đều khác tập rỗng. Giả sử A có k phần tử ($1 \leq k \leq 2021$). Khi đó B là tập hợp con (khác rỗng) của tập hợp có $2022 - k$ phần tử. - Ứng với mỗi giá trị k, có C_{2022}^k cách chọn tập hợp A và có $2^{2022-k} - 1$ cách chọn tập hợp B (bỏ tập rỗng). Do đó, với mỗi giá trị k, có $(2^{2022-k} - 1)C_{2022}^k$ cặp tập hợp A, B.	0,5
	- Cho $k = 1, 2, 3, \dots, 2021$, suy ra số cách chọn hai tập hợp là: $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2021} (2^{2022-k} - 1)C_{2022}^k$ (Do mỗi cặp A, B được tính hai lần).	0,25
Câu 6 (2,0đ)	Ta có $\sum_{k=1}^{2021} (2^{2022-k} - 1)C_{2022}^k = \sum_{k=1}^{2021} 2^{2022-k} C_{2022}^k - \sum_{k=1}^{2021} C_{2022}^k$ Từ $(1+x)^{2022} = C_{2022}^0 + C_{2022}^1 x + C_{2022}^2 x^2 + C_{2022}^3 x^3 + \dots + C_{2022}^{2022} x^{2022}$ suy ra: $2^{2021} C_{2022}^1 + 2^{2020} C_{2022}^2 + 2^{1999} C_{2022}^3 + \dots + 2^1 C_{2022}^{2021} = 3^{2022} - 2^{2022} - 1 ;$ $C_{2022}^1 + C_{2022}^2 + C_{2022}^3 + \dots + C_{2022}^{2021} = 2^{2022} - 2$	0,25
	Số cách chọn hai tập hợp A, B (không tính thứ tự) là $\frac{1}{2} \left[(3^{2022} - 2^{2022} - 1) - (2^{2022} - 2) \right] = \frac{1}{2} (3^{2022} - 2^{2023} + 1).$	0,25
	- TH2: Một trong hai tập hợp A, B có một tập bằng rỗng. Giả sử $A = \emptyset$, tập hợp B là tập hợp con khác rỗng của $X \setminus \{a\}$. Trường hợp này có $2^{2022} - 1$ cách chọn tập hợp B.	0,25
	Từ hai trường hợp trên suy ra số cách chọn hai tập hợp con khác nhau (không chứa a) giao nhau bằng rỗng là $\frac{1}{2} (3^{2022} - 2^{2023} + 1) + (2^{2022} - 1)$.	0,25
	Với mỗi cách chọn hai tập hợp trên, ta thêm phần tử a vào mỗi tập hợp để được hai tập hợp thỏa đề. Vậy số cách chọn hai tập hợp thỏa đề là $2023 \left[\frac{1}{2} (3^{2022} - 2^{2023} + 1) + (2^{2022} - 1) \right] = \frac{2023(3^{2022} - 1)}{2}.$	0,25

Câu 7 (3,0đ)	Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $y^2 \geq zx, z^2 \geq xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{z}{z+y} + \frac{y}{y+x} + \frac{2022z^{2023}}{z^{2023} + x^{2023}}$.	
	Ta có $P = \frac{1}{1+\frac{y}{z}} + \frac{1}{1+\frac{x}{y}} + \frac{2022}{1+\left(\frac{x}{z}\right)^{2023}}$	0,25
	Đặt $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$. Khi đó $abc = 1$ ($a, b, c > 0$) và $ac = \frac{y}{z}, bc = \frac{x}{y}$.	0,25
	Theo đề $\begin{cases} y^2 \geq zx \\ z^2 \geq xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} \geq \frac{z}{y} \\ \frac{z}{y} \geq \frac{x}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq b \\ b \geq c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq b \geq c > 0 \\ abc = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \geq 1 \\ 0 < c \leq 1 \end{cases}$	0,5
	$P = \frac{1}{1+ac} + \frac{1}{1+bc} + \frac{2022}{1+c^{2023}} \geq \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{2022}{1+\sqrt{c}}$ (vì $0 < c \leq 1$ nên $1+ac \leq 1+a, 1+bc \leq 1+b, 1+c^{2023} \leq 1+\sqrt{c}$)	0,5
	+ Lại có $\begin{cases} a, b > 0 \\ ab \geq 1 \end{cases}$ nên $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$ hay $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1}$.	0,5
	Suy ra $P \geq \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+1} + \frac{2022}{1+\sqrt{c}} = \frac{2\sqrt{c}+2022}{\sqrt{c}+1}$.	0,25
	Xét $f(t) = \frac{2t+2022}{t+1}$ ($0 < t = \sqrt{c} \leq 1$), $f'(t) = \frac{-2020}{(t+1)^2} < 0 \forall t \in (0;1]$. Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(0;1]$. Do đó $f(t) \geq f(1) = 1012$. Dấu “=” xảy ra khi $t = 1 \Leftrightarrow c = 1$.	0,5
	Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 1012 khi $x = z$.	0,25

----- HẾT -----

Chú ý: Nếu học sinh có lời giải đúng, khác với đáp án, Giám khảo căn cứ thang điểm câu tương ứng cho điểm phù hợp.