

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu I. (5,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A = \frac{3x + 5\sqrt{x-1} - 14}{x - 3 + \sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x-1} - 1} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} + 2} \begin{pmatrix} x \geq 1 \\ x \neq 2 \end{pmatrix}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm tất cả các giá trị của x để A nhận giá trị là số nguyên

2) Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = -mx + 2 - m$ (m là tham số). Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho

biểu thức $T = \frac{1}{(x_1 + 1)^4} + \frac{1}{(x_2 + 1)^4}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Câu II. (5,0 điểm)

1) Giải phương trình: $(x+1)\sqrt{x-1} + 5x = 13$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - xy + 2x^2 - 2y = 0 \\ \frac{(x+y-2)\sqrt{x+1}}{x-2} = y(x-5) + 9x - 5 \end{cases}$$

Câu III. (3,0 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ để biểu thức $\frac{a^2 - 3}{ab + 3}$ nhận giá trị là số nguyên

2) Trong mặt phẳng cho 2020 điểm phân biệt sao cho từ ba điểm bất kỳ luôn chọn ra được hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1cm. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1cm chứa không ít hơn 1010 điểm trong 2020 điểm đã cho

Câu IV. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC , K là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF

1) Chứng minh rằng $KB.KC = KE.KF$ và H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$

2) Qua điểm F kẻ đường thẳng song song với đường thẳng AC , đường thẳng này cắt các đường thẳng AK, AD lần lượt tại P và Q . Chứng minh $FP = FQ$

3) Chứng minh rằng đường thẳng HK vuông góc với đường thẳng AM

Câu V. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq \frac{1}{3}$$

ĐÁP ÁN

Câu I.

1.a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{3x + 5\sqrt{x-1} - 14}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+2)} - \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-1} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+2} \\ &= \frac{x + 6\sqrt{x-1} - 8}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+7)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+2)} = \frac{\sqrt{x-1}+7}{\sqrt{x-1}+2} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x-1}+7}{\sqrt{x-1}+2}$, với điều kiện $x \geq 1, x \neq 2$

1b) Ta có: $A = 1 + \frac{5}{\sqrt{x-1}+2}$. Với $x \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{5}{\sqrt{x-1}+2} \leq \frac{5}{2}$

Vì nhận giá trị nguyên nên $\frac{5}{\sqrt{x-1}+2}$ nhận giá trị nguyên

Th1: $\frac{5}{\sqrt{x-1}+2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow x = 10 (tm)$

Th2: $\frac{5}{\sqrt{x-1}+2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} (tm)$

Vậy các giá trị x cần tìm là $x \in \left\{ \frac{5}{4}; 10 \right\}$

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là :

$$x^2 = -mx + 2 - m \Leftrightarrow x^2 + mx + m - 2 = 0 (1)$$

Ta có: $\Delta = m^2 - 4(m-2) = m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2 + 4 > 0 (\forall m \in \mathbb{R})$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$. Suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2

Nhận xét x_1, x_2 khác -1 vì $(-1)^2 + m(-1) + m - 2 = -1 \neq 0$, đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$

Theo định lý Vi – et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } (x_1 + 4)^4 \cdot (x_2 + 1)^4 = [x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1]^4 = [m - 2 + (-m) + 1]^4 = 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$T = \frac{1}{(x_1 + 1)^4} + \frac{1}{(x_2 + 1)^4} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{(x_1 + 1)^4} \cdot \frac{1}{(x_2 + 1)^4}} \Rightarrow T \geq 2. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ}$$

$$\text{khi } (x_1 + 1)^4 = (x_2 + 1)^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 1 = x_2 + 1 \\ x_1 + 1 = -(x_2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = -2 \Leftrightarrow -m = -2 \Leftrightarrow m = 2(tm)$$

$$\text{Vậy } m = 2$$

Câu II.

1) Điều kiện : $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương:

$$(x + 1)(\sqrt{x - 1} - 1) + (6x - 12) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x + 1)(x - 2)}{\sqrt{x - 1} + 1} + 6(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{x + 1}{\sqrt{x - 1} + 1} + 6 \right) = 0 \begin{cases} x = 2(tm) \\ \frac{x + 1}{\sqrt{x - 1} + 1} + 6(VN) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = 2$$

2) Điều kiện: $x \geq -1, x \neq 2, y \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$x^3 - xy + 2x^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(ktm) \\ y = x^2 \end{cases}$$

Thay $y = x^2$ vào phương trình $\frac{(x + y - 2)\sqrt{x + 1}}{x - 2} = y(x - 5) + 9x - 5$, ta được phương

$$\text{trình : } \frac{(x + x^2 - 2)\sqrt{x + 1}}{x - 2} = x^2(x - 5) + 9x - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 + x - 2)\sqrt{x + 1}}{x - 2} = x^3 - 5x^2 + 9x - 5 \quad (1)$$

Với điều kiện bài toán

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x+2)\sqrt{x+1} = (x-2)(x-1)(x^2-4x+5)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x+2)\sqrt{x+1} - (x-2)(x^2-4x+5)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=1 \\ (x+2)\sqrt{x+1} - (x-2)(x^2-4x+5) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 + \sqrt{x+1} = (x-2)^3 + (x-2)$$

$$\Leftrightarrow [\sqrt{x+1} - (x-2)] \left[(\sqrt{x+1})^2 + (x-2)\sqrt{x+1} + (x-2)^2 + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = x-2 & (3) \\ (\sqrt{x+1})^2 + (x-2)\sqrt{x+1} + (x-2)^2 + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\forall x \left((\sqrt{x+1})^2 + (x-2)\sqrt{x+1} + (x-2)^2 + 1 \right.$$

$$\left. = \left[\sqrt{x+1} + \frac{1}{2}(x-2) \right]^2 + \frac{3(x-2)^2}{4} + 1 > 0, \forall x \geq -1 \text{ nên } (4) \text{ vô nghiệm} \right.$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \text{ (tmdk)}$$

$$x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{19+5\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có tập nghiệm } \left\{ (1;1); \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{19+5\sqrt{13}}{2} \right) \right\}$$

Câu III.

1) Yêu cầu bài toán tương đương $a^2 - 3$ chia hết cho $ab + 3$

$$\Rightarrow b(a^2 - 3) : (ab + 3) \Rightarrow [a(ab + 3) - 3(a + b)] : (ab + 3)$$

$$\Rightarrow 3(a + b) = k(ab + 3), k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Nếu } k = 1 \Rightarrow 3(a + b) = ab + 3 \Rightarrow (a - 3)(b - 3) = 6$$

$$\text{Do } a, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} a - 3 \geq -2 \\ b - 3 \geq -2 \end{cases}$$

$$\text{th1: } \begin{cases} a - 3 = 6 \\ b - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \end{cases} \text{ (tm)}; \text{th2: } \begin{cases} a - 3 = 3 \\ b - 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 5 \end{cases} \text{ (tm)}$$
$$\begin{cases} a - 3 = 1 \\ b - 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 9 \end{cases} \text{ (ktm)}; \begin{cases} a - 3 = 2 \\ b - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases} \text{ (ktm)}$$

$$\text{Nếu } k = 2 \Rightarrow 3(a + b) = 2(ab + 3) \Rightarrow (2a - 3)(2b - 3) = -3$$

$$\text{Do } a, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} 2a - 3 \geq -1 \\ 2b - 3 \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2a - 3 = 3 \\ 2b - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases} \text{ Thử lại thì } (a; b) = (3; 1)$$
$$\begin{cases} 2a - 3 = -1 \\ 2b - 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } k \geq 3 \Rightarrow 3(a + b) = k(ab + 3) \geq 3(ab + 3) \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) + 2 < 0 \text{ (vô lý vì } a, b \in \mathbb{N}^*)$$

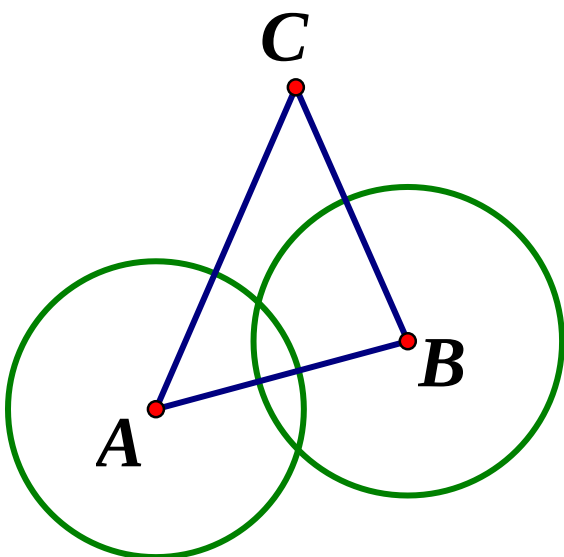
Vậy các cặp số (a, b) thỏa mãn là $(3; 1); (6; 5); (9; 4)$

2) Gọi A là một điểm bất kỳ trong số 2020 điểm đã cho

Xét hình tròn $(A; 1\text{cm})$

Trường hợp 1: Nếu hình tròn $(A; 1\text{cm})$ chứa tất cả 2019 điểm còn lại ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: Nếu trong 2019 điểm còn lại tồn tại điểm B nằm ngoài hình tròn $(A; 1\text{cm})$ thì $AB > 1\text{cm}$, vẽ đường tròn $(B; 1\text{cm})$. Ta chứng minh 2018 điểm còn lại hoặc thuộc hình tròn $(A; 1\text{cm})$ hoặc thuộc hình tròn $(B; 1\text{cm})$



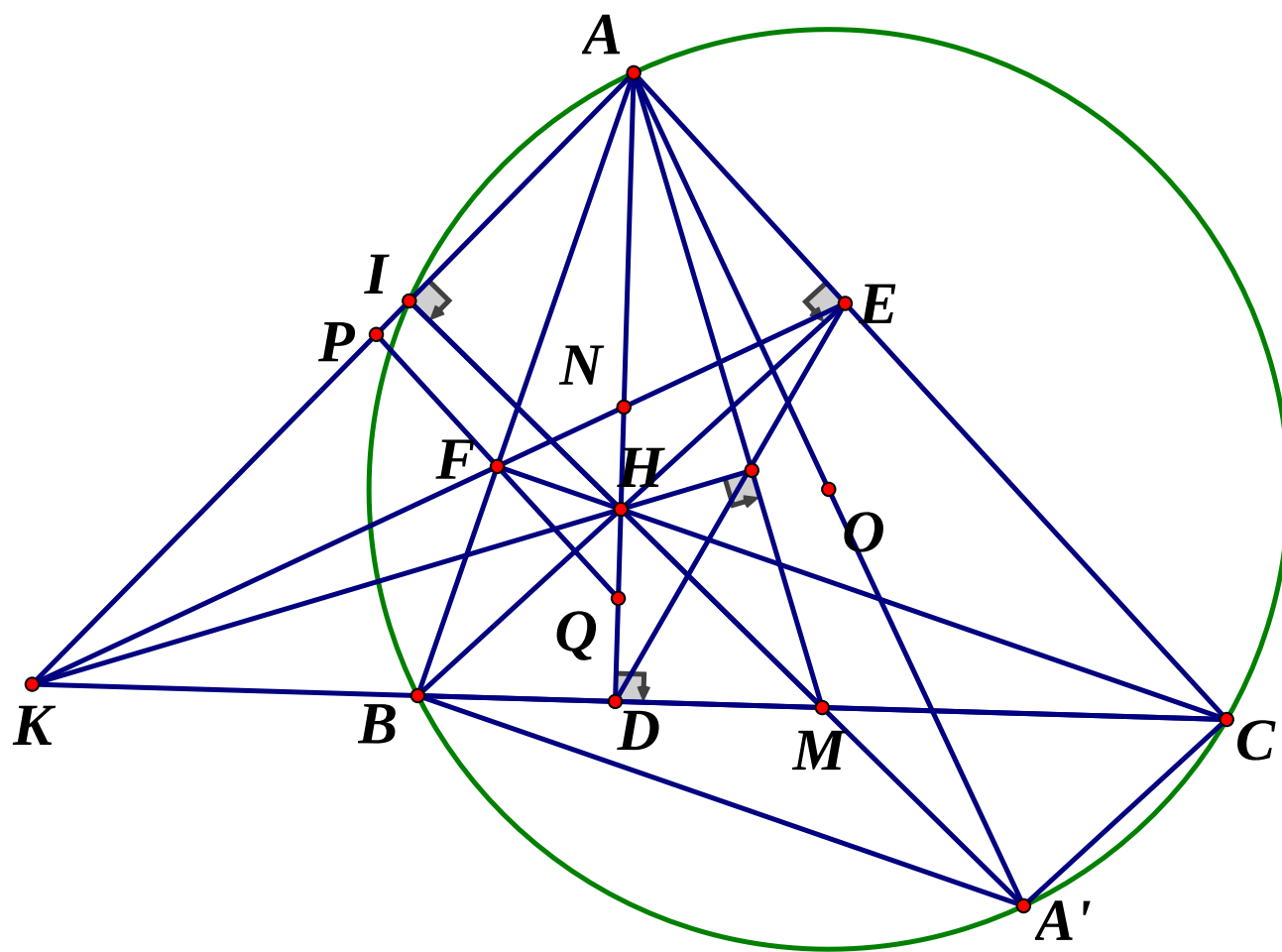
Thật vậy, giả sử tồn tại điểm C trong 2018 điểm còn lại nằm ngoài cả hai hình tròn $(A; 1\text{cm}); (B; 1\text{cm})$ như hình vẽ. Khi đó $AC > 1\text{cm}, BC > 1\text{cm}$. Như vậy với ba điểm A, B, C thì khoảng cách của hai điểm bất kỳ luôn lớn hơn 1 (mâu thuẫn với đề bài)

Vậy 2018 điểm còn lại hoặc thuộc hình tròn $(A; 1\text{cm})$ hoặc thuộc hình tròn $(B; 1\text{cm})$

Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một hình tròn chứa ít nhất 1009 điểm đã cho và chứa thêm điểm A hoặc điểm B

Vậy tồn tại một hình tròn có bán kính bằng 1cm , chứa không ít hơn 1010 điểm đã cho.

Câu IV.



1) Chỉ ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp và $\Delta KBF \square \Delta KEC$

Khi đó $\frac{KF}{KC} = \frac{KB}{KE} \Rightarrow KB.KC = KE.KF$

Chỉ ra tứ giác $BDHF$ nội tiếp , suy ra $FBH = FDH$ (1)

Chỉ ra tứ giác $CDHE$ nội tiếp, suy ra $HDE = HCE$ (2)

Ta có: $FBE = FCE(3)$ vì tứ giác $BFEC$ nội tiếp

Từ (1),(2),(3) $\Rightarrow \angle FDH = \angle EDH \Rightarrow HD$ là phân giác của FDE (4)

Chúng minh tương tự, ta được: HE là phân giác của FED (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$

2) Gọi N là giao điểm của AD, KE

Theo tính chất đường phân giác trong của $\triangle DEF \Rightarrow \frac{NF}{NE} = \frac{DF}{DE}$ (6)

Ta có KD là phân giác ngoài của $\triangle FDE$ tại đỉnh D . Theo tính chất đường phân giác

ngoài của $\triangle DEF \Rightarrow \frac{KF}{KE} = \frac{DF}{DE}$ (7)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow \frac{NF}{NE} = \frac{KF}{KE}$ (8)

Vì $PQ // AC$, theo định lý Ta – let mở rộng ta có:

$\frac{NF}{NE} = \frac{FQ}{AE}$ và $\frac{KF}{KE} = \frac{FP}{AE}$ (9)

Từ (8) và (9) $\Rightarrow \frac{FQ}{AE} = \frac{FP}{AE} \Rightarrow FQ = FP$ (đpcm)

3) Gọi I là giao điểm của KA với đường tròn (O) (I khác A) và A' là điểm đối xứng

với A qua O . Chứng minh được $BHCA'$ là hình bình hành

Suy ra ba điểm H, M, A' thẳng hàng

Vì tứ giác $AIBC$ nội tiếp đường tròn $(O) \Rightarrow KI.KA = KB.KC$

Theo ý 1) thì $KB.KC = KF.KE$

Suy ra $KI.KA = KF.KE \Rightarrow AIFE$ là tứ giác nội tiếp

Vì ba điểm A, E, F thuộc đường tròn đường kính $AH \Rightarrow I \in$ đường tròn đường kính

$AH \Rightarrow AI \perp HI$

Ta có $AIA' = 90^\circ \Rightarrow AI \perp A'I$

Kết hợp với $AI \perp HI \Rightarrow H, I, A'$ thẳng hàng

Mặt khác ba điểm H, M, A' thẳng hàng nên 4 điểm H, M, I, A' thẳng hàng

Xét $\triangle AKM$ có $AH \perp KM$ và $MH \perp AK \Rightarrow H$ là trực tâm $\triangle AKM$

Suy ra $KH \perp AM$ (đpcm)

Câu V.

Chứng minh với ba số dương x, y, z ta có: $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$

Chúng minh được bất đẳng thức $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} + \frac{z^2}{p} \geq \frac{(x+y+z)^2}{m+n+p} \forall m, n, p > 0(2)$. Đẳng thức

xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$

$$\text{Đặt } P = \frac{a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{5c^2 + (a+b)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức (1) ta có:

$$\left[(a^2 + b^2 + c^2) + (2a^2 + bc) + (2a^2 + bc) \right] \cdot \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2a^2 + bc} \right) \geq 9$$

$$\frac{9a^2}{5b^2 + (b+c)^2} = \frac{9a^2}{(a^2 + b^2 + c^2) + (2a^2 + bc) + (2a^2 + bc)} \leq a^2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{2a^2 + bc} \right)$$

Chúng minh tương tự, ta được:

$$\frac{9b^2}{5b^2 + (c+a)^2} \leq b^2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{2b^2 + ca} \right)$$

$$\frac{9c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq c^2 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{2c^2 + ab} \right)$$

Khi đó ta có:

$$\frac{9a^2}{5a^2 + (b+c)^2} + \frac{9b^2}{5b^2 + (c+a)^2} + \frac{9c^2}{5c^2 + (a+b)^2} \leq 1 + \left(\frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} \right)$$

$$\text{Suy ra } 9P \leq 4 - \left(\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \right)$$

Ta có :

$$\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} = \frac{b^2c^2}{2a^2bc} + \frac{c^2a^2}{2ab^2c + c^2a^2} + \frac{a^2b^2}{2abc^2 + a^2b^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức (2) ta được:

$$\frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{(ab + bc + ca)} = 1$$

Vậy $9P \leq 3 \Rightarrow P \geq \frac{1}{3}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$