

Bài 1: (5 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) - f(x)f(y) = f(xy) - 2xy - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 2: (5 điểm)

Cho $P(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số thực, có đúng 4 nghiệm dương phân biệt. Chứng minh rằng phương trình sau cũng có 4 nghiệm dương phân biệt:

$$\frac{1-3x}{x^4} \cdot P(x) + \left(1 - \frac{1-3x}{x^4}\right) \cdot P'(x) - P''(x) = 0.$$

Bài 3: (5 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , điểm D cố định trên cung BC không chứa A nhưng không phải là điểm chính giữa cung đó. Điểm P di động trên đoạn AD và $P \neq A, D$. Điểm Q đẳng giác với P trong tam giác ABC .

- Gọi G là giao điểm của DQ và BC . Chứng minh rằng $PG \parallel AQ$.
- Kẻ dây cung DE của đường tròn (O) vuông góc với BC , K là trung điểm DE , R là hình chiếu vuông góc của Q trên BC . Chứng minh rằng đường thẳng qua R và vuông góc với PK luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trên AD .

Bài 4: (5 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương $n < 60$ sao cho tập hợp $M = \{n; n+1; n+2; \dots; 60\}$ có thể viết được thành hợp của các tập con đôi một rời nhau thỏa mãn tính chất: trong mỗi tập con có một phần tử bằng tổng tất cả các phần tử còn lại trong tập con đó.

————— **HẾT** —————

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Chữ ký của cán bộ coi thi 1:..... Chữ ký của cán bộ coi thi 2:.....