

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

**KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP THÀNH PHỐ
KHÓA THI NGÀY 17.3.2021**

Môn thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (3 điểm)

Cho hai số a, b thỏa mãn điều kiện $a-b=1$

Tính giá trị của biểu thức: $P = a^4 - 4ab^3 + 3a^2b^2 - a^3b - 3a^2b + b^4$

Bài 2. (3 điểm)

Giải phương trình: $x^2(2-x)^2 = 3(1-x) - 5$

Bài 3. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác trong BD ($D \in AC$). Đường tròn (BCD) cắt cạnh AB tại E. Chứng minh $AE+AB=BC$.

Bài 4. (3 điểm)

Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a+2)(b+2) \geq cd$$

Bài 5. (4 điểm)

Cho tứ giác ABCD (AB không song song với CD) nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB. Các dây MC, MD cắt AB lần lượt tại các điểm F, E.

a) Chứng minh tứ giác CDEF nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của MC và MD. Gọi J là giao điểm của MD và AC.

Chứng minh: IJ song song với AB.

c) Đường thẳng IJ cắt AD, BC, CD lần lượt tại các điểm P, Q, K.

Chứng minh: $KP.KQ=KI.KJ$

Bài 6. (3 điểm)

Cho phương trình $x^2+ax+b=0$ (1) với a, b là các tham số nguyên. Giả sử phương trình (1) có một nghiệm là $2-\sqrt{3}$.

a) Tìm a, b .

b) Chứng minh rằng $A = (2+\sqrt{3})^{2021} + (2-\sqrt{3})^{2021}$ là một số nguyên và A chia hết cho 4.

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – HỒ CHÍ MINH (2020 – 2021)

Bài 1. (3 điểm)

Cho hai số a, b thỏa mãn điều kiện $a - b = 1$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = a^4 - 4ab^3 + 3a^2b^2 - a^3b - 3a^2b + b^4$.

Lời giải.

$$a - b = 1 \Leftrightarrow a = b + 1$$

$$P = a^4 - 4ab^3 + 3a^2b^2 - a^3b - 3a^2b + b^4$$

$$= (b + 1)^4 - 4(b + 1)b^3 + 3(b + 1)^2b^2 - (b + 1)^3b - 3(b + 1)^2b + b^4$$

$$= b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 - 4(b^4 + b^3) + 3(b^4 + 2b^3 + b^2) - (b^4 + 3b^3 + 3b^2 + b) - 3(b^3 + 2b^2 + b) + b^4$$

$$= 1.$$

Bài 2. (3 điểm)

Giải phương trình: $x^2(2-x)^2 = 3(1-x)^2 - 5$ (1)

Lời giải.

Cách 1:

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow x^2(x^2 - 4x + 4) = 3(1 - x)^2 - 5 \\
 &\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 3(x^2 - 2x + 1) - 5 \\
 &\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 3x^2 + 6x - 3 + 5 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2)(x^2 - 2x - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \text{ hoặc } x = 1 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Cách 2:

Đặt $t = 1 - x$

$$\Rightarrow t - 1 = -x$$

(1) trở thành:

$$\begin{aligned}
 (t - 1)^2(t + 1)^2 &= 3t^2 - 5 \\
 \Rightarrow (t^2 - 1)^2 &= 3t^2 - 5 \\
 \Rightarrow (t^2 - 1)^2 - 3t^2 + 5 &= 0 \\
 \Rightarrow (t^2 - 1)^2 - 3(t^2 - 1) + 2 &= 0 \\
 \Rightarrow t^2 - 1 = 1 \text{ hoặc } t^2 - 1 &= 2 \\
 \Rightarrow t = \pm\sqrt{2} \text{ hoặc } t = \pm\sqrt{3} \\
 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3} \text{ hoặc } x = 1 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Bài 3. (4 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường phân giác trong BD ($D \in AC$). Đường tròn (BCD) cắt cạnh AB tại E . Chứng minh $AE + AB = BC$.

Lời giải.

Vẽ $DH \perp BC$ ($H \in BC$)

Vì BD là phân giác $\widehat{ABC}$

$$\Rightarrow AB = BH$$

Tứ giác $BEDC$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{DEC} = \widehat{DBC} = \widehat{EBD} = \widehat{DCE}$$

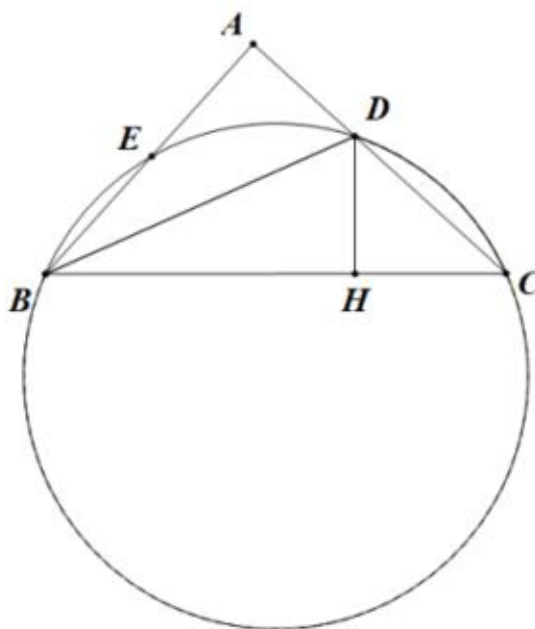
$$\Rightarrow DE = DC$$

$$\text{Mà } \widehat{AED} = \widehat{HCD}$$

$$\Rightarrow \triangle AED = \triangle HCD \text{ (ch - gn)}$$

$$\Rightarrow AE = HC$$

$$\Rightarrow AB + AE = BC.$$



Bài 4. (3 điểm)

Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Chứng minh bất đẳng thức sau: $(a + 2)(b + 2) \geq cd$.

Lời giải.

$$(a + 2)(b + 2) \geq cd$$

$$\Leftrightarrow 2ab + 4a + 4b + 8 \geq 2cd$$

$$\Leftrightarrow 2ab + 4a + 4b + 4 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2cd \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + 2ab) + 4(a + b) + 4 + (c^2 + d^2 - 2cd) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 + 4(a + b) + 4 + (c - d)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + 2)^2 + (c - d)^2 \geq 0 \text{ (Hiển nhiên đúng)}$$

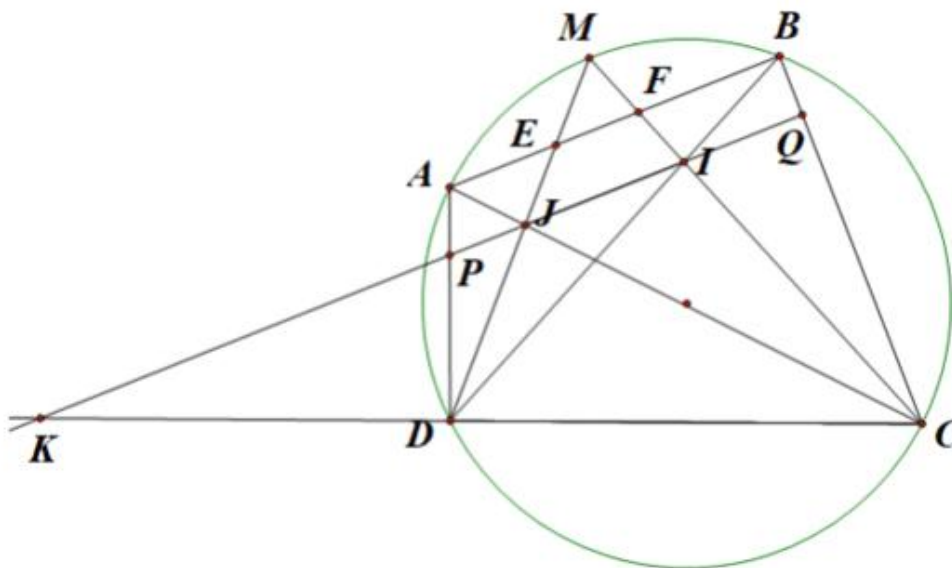
Vậy, ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. (4 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ (AB không song song với CD) nội tiếp đường tròn (O) và M là điểm chính giữa cung nhỏ AB . Các dây MC, MD cắt AB lần lượt tại các điểm F, E .

- Chứng minh tứ giác $CDEF$ nội tiếp.
- Gọi I là giao điểm của MC và BD . Gọi J là giao điểm của MD và AC .
Chứng minh: IJ song song với AB .
- Đường thẳng IJ cắt AD, BC, CD lần lượt tại các điểm P, Q, K .
Chứng minh: $KP \cdot KQ = KI \cdot KJ$.

Lời giải.



a) Chứng minh: tứ giác $CDEF$ nội tiếp:

Ta có: $\widehat{MEF} = \widehat{EDB} + \widehat{EBD}$
 $= \widehat{ADM} + \widehat{ACD}$
 $= \widehat{ACM} + \widehat{ACD} = \widehat{DCM}$
 $\Rightarrow$ Tứ giác $CDEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $IJ \parallel EF$:

Có: $\widehat{EDB} = \widehat{ADM} = \widehat{ICJ}$
 $\Rightarrow$ Tứ giác $IJDC$ nội tiếp.
 $\Rightarrow \widehat{MJI} = \widehat{MCD}$
 Mà tứ giác $EFCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEF} = \widehat{MCD}$
 $\Rightarrow \widehat{MJI} = \widehat{MEF} \Rightarrow EF \parallel IJ$ (đồng vị)

c) Chứng minh: $KP \cdot KQ = KI \cdot KJ$:

Do tứ giác $IJDC$ nội tiếp $\Rightarrow KI \cdot KJ = KC \cdot KD$ (1)
 Có $IJ \parallel EF \Rightarrow \widehat{DPQ} = \widehat{DAB} = 180^\circ - \widehat{BCD}$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp)
 $\Rightarrow$ Tứ giác $PQCD$ nội tiếp.
 $\Rightarrow KP \cdot KQ = KD \cdot KC$ (2)
 Từ (1) và (2) $\Rightarrow KP \cdot KQ = KD \cdot KC = KI \cdot KJ$.

Bài 6. (3 điểm)

Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ (1) với a, b là các tham số nguyên. Giả sử phương trình (1) có một nghiệm là $2 - \sqrt{3}$.

a) Tìm a và b .

b) Chứng minh rằng $A = (2 + \sqrt{3})^{2021} + (2 - \sqrt{3})^{2021}$ là một số nguyên và A chia hết cho 4.

Lời giải.

a) Thay trực tiếp $2 - \sqrt{3}$ vào ta thu được

$$(a + 4)(2 - \sqrt{3}) + b - 1 = 0$$

Vì a, b nguyên nên $a = -4, b = 1$.

b) Để chứng minh được phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{3}, x_2 = 2 + \sqrt{3}$

Ta có theo định lý Viète: $x_1 + x_2 = 4$

$$x_1 x_2 = 1$$

Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát hơn: $A_n = x_1^n + x_2^n$ nguyên với mọi n tự nhiên và chia hết cho 4 với mọi n lẻ bằng phương pháp quy nạp toán học.

Để thấy, với $n = 1$ và $n = 2$ thì A_1, A_2 nguyên và $A_1 \vdots 4$.

Giả sử đúng tới $n = k$, khi đó

$$\begin{aligned} & x_1^{k+1} + x_2^{k+1} \\ &= (x_1^k + x_2^k)(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, $x_1^k + x_2^k$ nguyên, $x_1^{k-1} + x_2^{k-1}$ nguyên.

$\Rightarrow A_n$ nguyên với mọi n tự nhiên.

Giả sử $A_n \vdots 4$ đúng tới $n = 2k - 1$, khi đó

$$\begin{aligned} & x_1^{2k+1} + x_2^{2k+1} \\ &= (x_1^{2k} + x_2^{2k})(x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_1^{2k-1} + x_2^{2k-1}) \\ &= 4(x_1^{2k} + x_2^{2k}) - (x_1^{2k-1} + x_2^{2k-1}) \vdots 4 \text{ (theo giả thiết quy nạp)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_n \vdots 4$ đúng với mọi n lẻ.

Vậy, $A_n = x_1^n + x_2^n$ nguyên với mọi n tự nhiên và chia hết cho 4 với mọi n lẻ.

Theo bài toán trên, A_{2021} là số nguyên và chia hết cho 4.