

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2 điểm)

a) Cho biểu thức $P = \left(\frac{6x}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{6\sqrt{x}-2}{9x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}} \right)$, với $x > 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{9}$

Tìm các số nguyên x để P nhận giá trị nguyên

b) Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 12$. Chứng minh rằng

$$x\sqrt{\frac{(12+y^2)(12+x^2)}{12+x^2}} + y\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+z^2)}{12+y^2}} + z\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+y^2)}{12+z^2}} = 24$$

Câu 2. (0,5 điểm) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số, lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S . Tính xác suất để lấy được là số chính phương không vượt quá 2022

Câu 3. (2 điểm)

a) Theo kế hoạch một công nhân phải làm 54 sản phẩm trong một thời gian dự định. Do yêu cầu đột xuất, người đó phải làm 68 sản phẩm nên mỗi giờ người đó đã làm tăng thêm 3 sản phẩm vì thế công việc hoàn thành sớm hơn so với dự định là 20 phút. Hỏi theo dự định mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm, biết rằng mỗi giờ người đó làm được không quá 12 sản phẩm.

b) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x + m - 3 = 0$ (1) (với m là tham số). Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 2\sqrt{2 - x_1x_2}$

Câu 4. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) của tam giác ABC cắt nhau tại H . Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH và BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác A)

a) Chứng minh rằng tứ giác $DMEF$ nội tiếp

b) Chứng minh rằng tứ giác $IOMK$ là hình thang cân

c) Chứng minh rằng $KF \cdot HE = KE \cdot KF$

d) Tiếp tuyến tại A và K của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T . Chứng minh rằng TM, AH, EF đồng quy

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leq \frac{3}{2}$$

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\sqrt{\frac{a}{a+bc}} + \sqrt{\frac{b}{b+ac}} + \sqrt{\frac{c}{c+ab}}$$

Câu 6. (1,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì biểu thức $P = n(13n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $3x^2 + 2y^2 + x = 2(xy + y + 2)$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2 điểm)

c) Cho biểu thức $P = \left(\frac{6x}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{6\sqrt{x}-2}{9x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}} \right)$, với $x > 0; x \neq 1; x \neq \frac{1}{9}$

Tìm các số nguyên x để P nhận giá trị nguyên

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{6x}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left(\frac{6\sqrt{x}-2}{9x\sqrt{x}-6x+\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{6x - (\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2(3\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x} \cdot (3\sqrt{x}-1)^2} = \frac{6x - \sqrt{x} - 1 - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} \cdot (3\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(3\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x} \cdot (3\sqrt{x}-1)} = \frac{4}{x-1} \end{aligned}$$

Do $x \in \mathbb{N}$ nên để $P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-1 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \Rightarrow x-1 \in \{1; 2; 4\}$ (do $x > 1$) $\Rightarrow x \in \{2; 3; 5\}$ (tmdk)

d) Cho x, y, z là các số thực dương và thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 12$. Chứng minh

$$\text{rằng } x\sqrt{\frac{(12+y^2)(12+x^2)}{12+x^2}} + y\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+z^2)}{12+y^2}} + z\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+y^2)}{12+z^2}} = 24$$

Ta có :

$$xy + yz + zx = 12 \Leftrightarrow 12 + x^2 = x^2 + xy + yz + zx \Leftrightarrow 12 + x^2 = (x+y)(x+z)$$

Tương tự ta có : $12 + y^2 = (x+y)(y+z)$; $12 + z^2 = (z+y)(x+z)$, khi đó :

$$\begin{aligned} &x\sqrt{\frac{(12+y^2)(12+z^2)}{12+x}} + y\sqrt{\frac{(12+x^2)(12+z^2)}{12+y}} + z\sqrt{\frac{(12+y^2)(12+x)}{12+z}} \\ &= x\sqrt{(y+z)^2} + y\sqrt{(x+z)^2} + z\sqrt{(y+x)^2} = x(y+z) + y(x+z) + z(y+x) \\ &= 2(xy + yz + zx) = 2 \cdot 12 = 24 \end{aligned}$$

Câu 2. (0,5 điểm) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số, lấy ngẫu nhiên 1 số từ tập S . Tính xác suất để lấy được là số chính phương không vượt quá 2022

Không gian mẫu : $\{1000; 1001; \dots; 9999\} \Rightarrow n = 9000$

Theo đề ta có : $1000 \leq n^2 \leq 2022 \Rightarrow 32^2 \leq n^2 \leq 44^2$, nên số các số chính phương là :

$$44 - 32 + 1 = 13. \text{ Vậy xác suất cần tìm : } \frac{13}{9000}$$

Câu 3. (2 điểm)

c) Theo kế hoạch một công nhân phải làm 54 sản phẩm trong một thời gian dự định. Do yêu cầu đột xuất, người đó phải làm 68 sản phẩm nên mỗi giờ người đó đã làm tăng thêm 3 sản phẩm vì thế công việc hoàn thành sớm hơn so với dự định là 20 phút. Hỏi theo dự định mỗi giờ người đó phải làm bao nhiêu sản phẩm, biết rằng mỗi giờ người đó làm được không quá 12 sản phẩm.

Đôi 20 phút $= \frac{1}{3}$ giờ

Gọi số sản phẩm mỗi giờ người đó phải làm theo kế hoạch là x (sản phẩm)

Điều kiện : $x \in \mathbb{N}^*, x \leq 12$

Thời gian dự định người đó hoàn thành công việc là : $\frac{54}{x}$ (giờ)

Thực tế mỗi giờ làm được : $x+3$ (sản phẩm)

Thời gian thực tế người đó hoàn thành công việc là $\frac{68}{x+3}$ (giờ)

Theo đề bài ta có phương trình :

$$\frac{54}{x} - \frac{68}{x+3} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x^2 + 54x - 486 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9(tm) \\ x = -54(ktm) \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch người đó phải là 9 sản phẩm

d) Cho phương trình $x^2 - (m-1)x + m-3 = 0$ (1) (với m là tham số). Tìm m để phương

trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 2\sqrt{2-x_1x_2}$

$$x^2 - (m-1)x + m-3 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-3) = m^2 - 6m + 13 = (m-3)^2 + 4 > 0 \quad (\forall m)$$

Nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

Áp dụng định lý Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1x_2 = m-3 \end{cases}$. Ta có :

$$x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 2\sqrt{2-x_1x_2} \quad (m \leq 5)$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5x_1x_2 + 2\sqrt{2-x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 2(m-3) = 5(m-3) + 2\sqrt{2-(m-3)}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 9m + 22 = 2\sqrt{5-m}$$

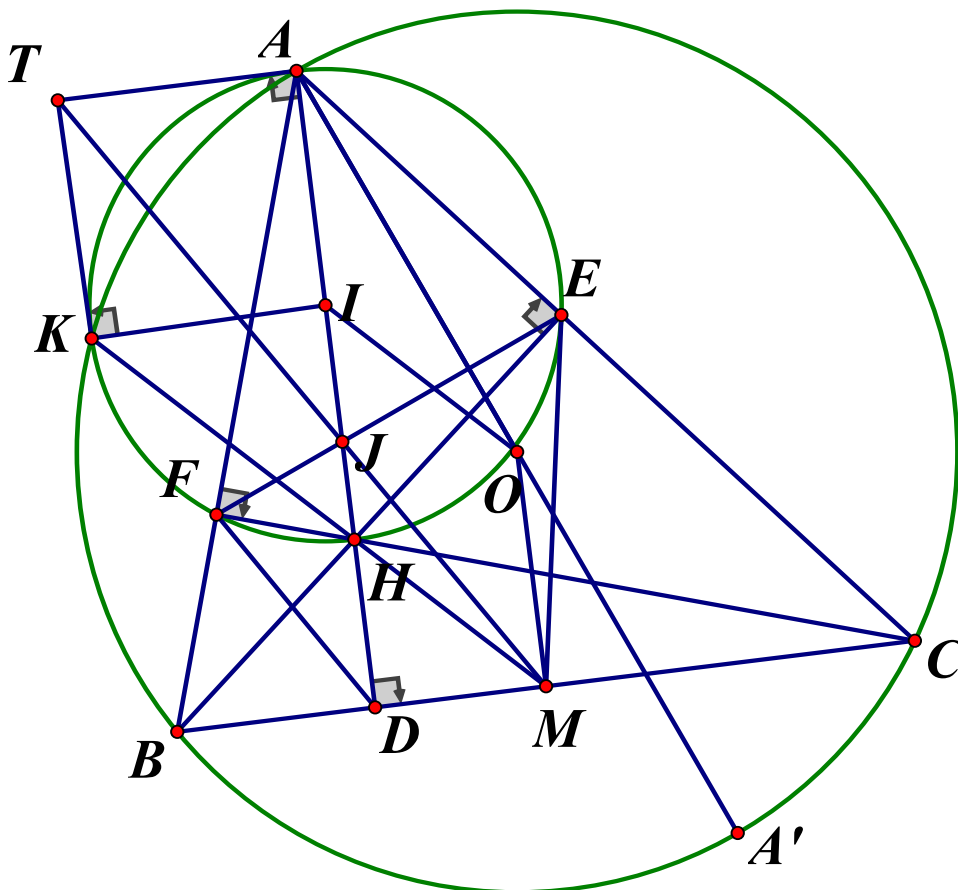
$$\text{Đặt } t = \sqrt{5-m}, t \geq 0 \rightarrow t^2 = 5-m \Leftrightarrow m = 5-t^2$$

$$\Leftrightarrow (5-t^2)^2 - 9(5-t^2) + 22 = 2t \Leftrightarrow t^4 - t^2 - 2t + 2$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 (t^2 + 2t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1(tm) \Rightarrow m = 5-1 = 4(tm) \\ t^2 + 2t + 2 = 0(VN) \end{cases}$$

Vậy $m = 4$

Câu 4. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , ba đường cao AD, BE, CF ($D \in BC, E \in AC, F \in AB$) của tam giác ABC cắt nhau tại H . Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AH và BC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm K (K khác A)



e) Chứng minh rằng tứ giác $DMEF$ nội tiếp

ΔMBE cân tại $M \Rightarrow \angle EMC = 2\angle MBE$, $BFHD, BFEC$ là các tứ giác nội tiếp (1)

Nên $\angle DFE = \angle DFH + \angle CFE = \angle DBH + \angle CBE = 2\angle DBH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $DMEF$ là tứ giác nội tiếp

f) Chứng minh rằng tứ giác $IOMK$ là hình thang cân

$\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ \Rightarrow AH$ là đường kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta AEF \Rightarrow \angle AKH = 90^\circ$

Vẽ đường kính AA' của (O) . ta có $\angle AKA' = 90^\circ \Rightarrow K, H, A'$ thẳng hàng

Dễ chứng minh $BHCA'$ là hình bình hành $\Rightarrow M$ là trung điểm của $A'H$

Dễ chứng minh $IOMH$ là hình bình hành nên $OI \parallel KM \Rightarrow OM = IH = IK$

Nhận thấy IK cắt IH và $IH \parallel OM \Rightarrow IK$ không song song với OM

Suy ra $OIKM$ là hình thang cân

g) Chứng minh rằng $KF \cdot HE = KE \cdot KF$

Vì ΔMBE cân tại M nên $\angle MEB = \angle MBE$ mà $\angle MBE = \angle DAC$ (cùng phụ với $\angle ACB$) và

$$\angle HAE = \angle HKE \text{ (do } AEHF \text{ là tứ giác nội tiếp)} \Rightarrow \angle MEH = \angle MKE$$

$$\Rightarrow \triangle MEH \sim \triangle MKE (g.g) \Rightarrow \frac{EH}{EK} = \frac{ME}{MK}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{FH}{FK} = \frac{MF}{MK} \text{ mà } ME = MF \text{ nên } \frac{EH}{EK} = \frac{FH}{FK} \Rightarrow EH.FK = EK.FH$$

**h) Tiếp tuyến tại A và K của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T.
Chứng minh rằng TM, AH, EF đồng quy**

Gọi P là giao điểm của AK với BC, ta có : $\angle AFK = \angle AHK = \angle APD$ suy ra tứ giác HKPD nội tiếp. Do đó $\angle KFP = \angle KBP = \angle KAC = \angle KAE = 180^\circ - \angle KFE$ nên E, F, P thẳng hàng

Ta có $\angle TIK = \angle AHK = \angle DPK \Rightarrow \triangle KTI \sim \triangle KPD \Rightarrow \triangle KPI \sim \triangle KMT$ nên $\angle PIK = \angle MTK$

Mà $IK \perp TK$ nên $PI \perp MT$

Xét $\triangle IMP$ có $EF \perp IM, TM \perp IP, ID \perp MP \Rightarrow MT, EF, AD$ đồng quy

Câu 5. (1,0 điểm)

c) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leq \frac{3}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có :

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{ab}{2\sqrt{ab}} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{\sqrt{ab}}{2} \leq \frac{a+b}{4}$$

Tương tự ta có : $\frac{bc}{b+c} \leq \frac{b+c}{4}; \frac{ac}{a+c} \leq \frac{a+c}{4}$. Suy ra :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leq \frac{a+b+b+c+c+a}{4} = \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$

d) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=abc$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$\text{biểu thức } \sqrt{\frac{a}{a+bc}} + \sqrt{\frac{b}{b+ac}} + \sqrt{\frac{c}{c+ab}}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2+abc}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+abc}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+abc}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2+ab+bc+ca}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+ab+bc+ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} + \frac{c}{\sqrt{(c+b)(a+c)}} \end{aligned}$$

Áp dụng bất Co-si ta có :

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \geq \frac{2}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right)$$

Tương tự ta có : $\frac{b}{\sqrt{(a+b)(b+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} \right) (2); \frac{c}{\sqrt{(c+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+b} + \frac{c}{a+c} \right) (3)$

Từ (1), (2), (3) ta có :

$$P \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+b} + \frac{c}{a+c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{a+b} + \frac{c+b}{c+b} + \frac{a+c}{a+c} \right) = \frac{3}{2}$$

Vậy $\text{Max } P = \frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 3$

Câu 6. (1,0 điểm)

c) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì biểu thức $P = n(13n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6

Nếu n chẵn $\Rightarrow n:2$, nếu n lẻ $\Rightarrow 13n+1:2 \Rightarrow P:2 (\forall n \in \mathbb{Z})$

Nếu $n \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow P:3$. nếu $n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (2n+1):3$

Nếu $n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (13n+1):3 \Rightarrow P:3$

Mà $(2,3)=1 \Rightarrow P:6 (\forall n \in \mathbb{Z})$

d) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 2y^2 + x = 2(xy + y + 2)$

$$3x^2 + 2y^2 + x = 2(xy + y + 2) \Leftrightarrow 2y^2 - 2(x+1)y + 3x^2 + x - 4 = 0 (1)$$

Ta xem phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn y với x là tham số

$\Delta' = (x+1)^2 - 2(3x^2 + x - 4) = -5x^2 + 9$. Để phương trình (1) có nghiệm thì :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -5x^2 + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{9}{5} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \text{ (do } x \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\}$$

Thay vào (1) ta được các nghiệm nguyên $(-1; 1); (-1; -1); (0; -1); (1; 2); (1; 0)$