

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2020 - 2021

Môn: TOÁN

Ngày thi: 12/10/2020

Thời gian: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1: (3 điểm).

Giải hệ phương trình sau
$$\begin{cases} x + 3y = x^3 - 12 \\ -y + 4z = y^3 - 6 \\ 9z + 2x = z^3 + 32 \end{cases}$$

Câu 2: (3 điểm).

Với ba số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện $abc \neq 0$ và $\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \leq 3$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = [a^2 + 2(b^2 + c^2)][b^2 + 2(c^2 + a^2)][c^2 + 2(a^2 + b^2)].$$

Câu 3: (3 điểm).

Tìm tất cả các số nguyên dương n và k sao cho $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

Câu 4: (3 điểm).

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{4^n}} \right) \end{cases}$$
 Tính u_n theo n và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Câu 5: (4 điểm).

a) Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Xét n số thực phân biệt $x_1, \dots, x_n$. Đặt $S = \{x_i + x_j; 1 \leq i \neq j \leq n\}$. Hỏi S có ít nhất bao nhiêu phần tử?

b) Trong mặt phẳng tọa độ, cho 2021 điểm phân biệt, mỗi điểm có hoành độ và tung độ đều là các số nguyên không âm không vượt quá 807. Chứng minh rằng có thể tìm được 4 điểm tạo thành 4 đỉnh của một hình thang cân. (Hình chữ nhật được coi là một hình thang cân).

Câu 6: (4 điểm). Cho tam giác ABC có trực tâm H. Điểm P di chuyển trên cạnh BC. Lấy các điểm M, N sao cho $PM \perp AB, MB \perp BC, PN \perp AC, NC \perp BC$.

a) Chứng minh đường thẳng MN đi qua H.

b) Chứng minh đường thẳng đi qua P và vuông góc với MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:

Số báo danh:

Chữ ký của cán bộ coi thi 1:..... Chữ ký của cán bộ coi thi 2:.....