

Bài 1. (1,5 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{a^2 - \sqrt{a}} : \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + a + a\sqrt{a}}$ ($a > 0; a \neq 1$)
2. Cho hàm số $y = (m - 2)x + 2$ (m là tham số) có đồ thị là đường thẳng (d).
 - a) Tìm điều kiện của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
 - b) Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng 1.

Bài 2. (1,5 điểm)

1. Cho a là số nguyên lẻ và không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $a^2 - 2021^2$ chia hết cho 24.
2. Cho các số nguyên tố p, q thỏa mãn $p + q^2$ là số chính phương. Chứng minh rằng :
 - a) $p = 2q + 1$.
 - b) $p^2 + q^{2021}$ không phải là số chính phương.

Bài 3. (2,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2x^2 + 7xy - 4y^2 = 0 \\ \sqrt{x^2 + y + 6} + 2y = 1 \end{cases}$$
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + 2m - 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 2m - 2} + \sqrt{x_2} = 3$.
3. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau và thỏa mãn $(c + a)(c + b) = 4$. Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{(a - b)^2} + \frac{1}{(c + a)^2} + \frac{1}{(c + b)^2} \geq 1.$$

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O, bán kính $R = 4\text{cm}$ và hai điểm B, C cố định trên (O), BC không là đường kính. Điểm A thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC.

- a) Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$.
- b) Gọi M là điểm đối xứng của A qua BC, N là điểm đối xứng của B qua AC. Chứng minh rằng :

CD.CN = CE.CM.

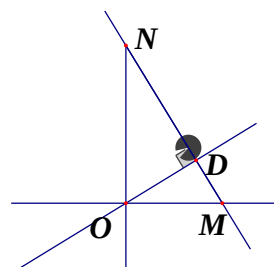
- c) Trong trường hợp 3 điểm C, M, N thẳng hàng, tính độ dài đoạn thẳng AB.
- d) Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng AI cắt EF tại K. Gọi H là hình chiếu vuông góc của K trên BC. Chứng minh rằng đường thẳng AH luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Bài 5. (1 điểm)

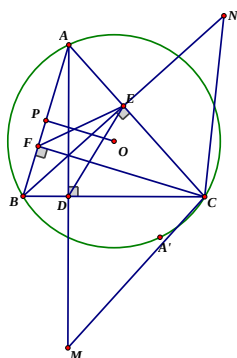
Cho tập hợp S gồm n số nguyên dương đôi một khác nhau ($n \geq 3$) thỏa mãn tính chất: tổng của 3 phần tử bất kì trong S đều là số nguyên tố. Tìm giá trị lớn nhất có thể của n .

ĐÁP ÁN

Bài 1. 1.1. $A = \frac{1}{a^2 - \sqrt{a}} : \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + a + a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}(1 + \sqrt{a} + a)}{(\sqrt{a^4} - \sqrt{a})(\sqrt{a} + 1)}$ $= \frac{\sqrt{a}(1 + \sqrt{a} + a)}{\sqrt{a}(\sqrt{a^3} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{a + \sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a^3} - 1)(\sqrt{a} + 1)}$ $= \frac{a + \sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a} - 1)(a + \sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{1}{a - 1}$ Vậy $A = \frac{1}{a - 1}$ 1.2. a) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m - 2 > 0$ $\Leftrightarrow m > 2$ b) Với $m = 2$, (d): $y = 2$ cách O một khoảng bằng 2, (không thỏa) Với $m \neq 2$, gọi M, N lần lượt là giao điểm của (d) với trục hoành, trục tung. Hoàng độ của M là nghiệm của phương trình: $(m - 2)x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2 - m}$ $\Rightarrow OM = \frac{2}{ 2 - m }$ Đường thẳng (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 nên $ON = 2$ Gọi OH là khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d), áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông OMN ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} \Leftrightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{(2 - m)^2}{4} + \frac{1}{4}$ mà $OH = 1$ nên $\frac{(2 - m)^2}{4} + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 5 = 4 \Leftrightarrow (m - 2)^2 = 3$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = \sqrt{3} \\ m - 2 = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + \sqrt{3} \\ m = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
Bài 2. 2.1. Vì a là số nguyên lẻ nên $a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Từ đó $a^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow a^2 - 1 = 4k(k + 1) : 8 \quad (1) \text{ vì } k(k + 1) : 2$ Mặt khác, a không chia hết cho 3 nên $a = 3q \pm 1, q \in \mathbb{Z}$ $a^2 = 9q^2 \pm 6q + 1 \Rightarrow a^2 - 1 : 3 \quad (2)$ Từ (1) và (2), ta được $a^2 - 1 : 24$ Từ đó: $a^2 - 2021^2 = (a^2 - 1) - (2021^2 - 1) = (a^2 - 1) - 2020.2022$ $= (a^2 - 1) - 2^2.5.101.2.3.337 : 24$ 2.2. a) Đặt $p + q^2 = n^2, n \in \mathbb{N}$ Suy ra $p = (n - q)(n + q)$	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm



Vì p là số nguyên tố nên $\begin{cases} n - q = 1 \\ n + q = p \end{cases}$. Do đó $p = 2q + 1$ b) Giả sử $p^2 + q^{2021}$ là số chính phương, đặt $p^2 + q^{2021} = m^2$ Suy ra $q^{2021} = (m - p)(m + p)$. Có 2 trường hợp: TH1: $\begin{cases} m - p = 1 \\ m + p = q^{2021} \end{cases} \Rightarrow q^{2021} - 1 = 2p = 4q + 2 \Rightarrow q^{2021} = 4q + 3$. Suy ra $2 : q$. Từ đó: $q = 3$ Tuy nhiên, khi đó đẳng thức $q^{2021} = 4q + 3$ không xảy ra TH2: $\begin{cases} m - p = q^a \\ m + p = q^b \end{cases}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*, a + b = 2021$. Suy ra $q^b - q^a = 2p = 4q + 2$ Từ đó $2 : p$ và $q = 2$ Khi đó $2^b - 2^a = 10 \Rightarrow 2^{a-1}(2^{b-a} - 1) = 5$ Suy ra $\begin{cases} 2^{a-1} = 1 \\ 2^{b-a} = 5 \end{cases} \Rightarrow 2^{b-a} = 6$ (vô lý) Tóm lại, 2 trường hợp đều không xảy ra tức là điều giả sử sai hay nói cách khác $p^2 + q^{2021}$ không phải số chính phương.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
Bài 3. 3.1. $\begin{cases} 2x^2 + 7xy - 4y^2 = 0 & (1) \\ \sqrt{x^2 + y + 6} + 2y = 1 & (2) \end{cases}$ Từ (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - xy - 4y^2 = 0 \Leftrightarrow x(2x - y) + 4y(2x - y) = 0$ $\Leftrightarrow (x + 4y)(2x - y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = -4y \end{cases}$ Thay $x = -4y$ vào (2) ta được $\sqrt{16y^2 + y + 6} = 1 - 2y$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{1}{2} \\ 16y^2 + y + 6 = (1 - 2y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{1}{2} \\ 12y^2 + 5y + 5 = 0 \end{cases}$. Vô nghiệm Thay $y = 2x$ vào (2) ta được $\sqrt{x^2 + 2x + 6} = 1 - 4x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 6 = 1 - 8x - 16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ 15x^2 - 10x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \\ x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ Với $x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}$ Vậy hệ có nghiệm $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ 3.2 Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 25 - 4(2m - 2) > 0 \\ S = 5 > 0 \\ P = 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{33}{8} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{33}{8}$ $x_1 + x_2 = 5; x_1 \cdot x_2 = 2m - 2$ và $x_1^2 - x_1 + 2m - 2 = 0$	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm



c) Theo tính chất đối xứng, ta có: $\widehat{MCB} = \widehat{BCA} = \widehat{ACN}$.

Do đó, trong trường hợp C, M, N thẳng hàng thì $\widehat{BCA} = 60^\circ$.

Gọi P là trung điểm của AB thì tam giác AOP vuông tại O

$$\Rightarrow \widehat{AOP} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \widehat{ACB} = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có : } \sin \widehat{AOP} = \frac{AP}{AO} \Rightarrow AP = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2AP = 4\sqrt{3}$$

0,25 điểm

0,25 điểm

0,25 điểm

d)

Gọi J là trung điểm của EF

Các tam giác AEF và ABC có góc A chung và

$\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (do tứ giác BCEF nội tiếp) nên đồng

$$\text{dạng } \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

Mà

$$\frac{EF}{BC} = \frac{2EJ}{BI} = \frac{EJ}{BI} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EJ}{BI} \Rightarrow \triangle AEJ \sim \triangle ABI$$

$$\Rightarrow \widehat{AJE} = \widehat{AIB}$$

Ta có: Tam giác IEF cân tại I (vì IE = IF = 1/2BC)

$$\Rightarrow IJ \perp EF.$$

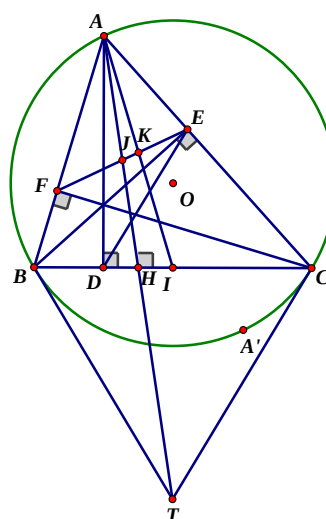
Tứ giác IKJH có : $\widehat{HKI} = \widehat{IJK} = 90^\circ$ nên nội tiếp

$$\Rightarrow : \widehat{AJE} + \widehat{HJK} = \widehat{AIB} + \widehat{HJK} = 180^\circ \Rightarrow A, J, H \text{ thẳng hàng. (1).}$$

Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại T.

$$\text{Ta có : } OA^2 = OB^2 = OI \cdot OT \Rightarrow \frac{OA}{OI} = \frac{OT}{OA} \text{ mà góc } \angle A \text{ chung } \Rightarrow \triangle OAI \sim$$

$$\triangle OTA$$



0,25 điểm

0,25 điểm

