

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ TOÁN CHUYÊN KHTH (Vòng 2) NĂM HỌC 2021-2022

TRUNG TÂM TOÁN MATHTECH
<https://www.mathtech.vn/>

1 Đề thi

Bài I (4,0 điểm).

1. Với a, b, c là những số thực thỏa mãn $a + b + c \neq 0$ và $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc} + \frac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc} + \frac{c}{c^2(a+b+c)+1+abc} = \frac{1+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2}.$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x^2y^2 = 11 \\ 3xy(x + 2y) + 31 = 9x + 18y + 13xy. \end{cases}$$

Bài II (2,0 điểm).

1. Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn: $3^x + 29 = 2^y$.
2. Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $2(a + b + c) + ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{a+1}{a^2+10a+21} + \frac{b+1}{b^2+10b+21} + \frac{c+1}{c^2+10c+21}.$$

Bài III (3,0 điểm). Cho hình thoi $ABCD$ ($\widehat{BAD} < 90^\circ$) có đường tròn nội tiếp (O) . Các điểm M, N lần lượt thuộc cạnh CB, CD sao cho MN tiếp xúc (O) tại P , và tam giác CMN nhọn, không cân. Đường thẳng MN lần lượt cắt các đường thẳng AB, AD tại E, F . Gọi K, L theo thứ tự là trực tâm của tam giác BME, DNF .

1. Chứng minh rằng OP đi qua trung điểm I của KL .
2. Gọi H là trực tâm tam giác CMN . Chứng minh rằng
- $$\frac{OI}{CH} = \frac{EF}{2MN} = -\frac{1}{2}.$$
3. Gọi giao điểm của EK, FL với BD lần lượt là S, T . $\odot$ giao điểm của NS và MT là Q . Đường tròn nội tiếp của tam giác CMN tiếp xúc tại G . Chứng minh rằng hai đường thẳng PQ và GH song song.

1

CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC VÀ CÔNG NGHỆ MATHTECH
 Hotline: 0946.20.18.81
 Website: www.mathtech.vn

MATHTECH

Bài IV (1,0 điểm). Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ là những số thực thỏa mãn

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_{2021}}{1+a_{2021}^2} = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k ($1 \leq k \leq 2021$) sao cho

$$\left| \frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{2a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{ka_k}{1+a_k^2} \right| \leq \frac{2k+1}{8}.$$

2 Phân tích, lời giải và bình luận các bài toán

Bài I (4,0 điểm).

1. Với a, b, c là những số thực thỏa mãn $a + b + c \neq 0$ và $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc} + \frac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc} + \frac{c}{c^2(a+b+c)+1+abc} = \frac{1+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2}.$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x^2y^2 = 11 \\ 3xy(x + 2y) + 31 = 9x + 18y + 13xy. \end{cases}$$

Phân tích.

1. Một ý tưởng để giải bài này là sử dụng giả thiết $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$ để quy hai phân thức về cùng mẫu.
2. Nhận xét có thể thu gọn hệ bằng cách đặt ẩn phụ.

Lời giải. 1. Vì $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$, nên

$$1 + abc = (a + b)(b + c)(c + a) + abc = (ab + bc + ca)(a + b + c).$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc} &= \frac{a}{(a+b+c)(a^2+ab+bc+ca)} \\ &= \frac{a}{(a+b+c)(a+b)(a+c)}, \\ \frac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc} &= \frac{b}{(a+b+c)(b^2+ab+bc+ca)} \\ &= \frac{b}{(a+b+c)(b+a)(b+c)}, \\ \frac{c}{c^2(a+b+c)+1+abc} &= \frac{c}{(a+b+c)(c^2+ab+bc+ca)} \\ &= \frac{c}{(a+b+c)(c+a)(a+b)}. \end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết $a + b + c \neq 0$, suy ra

$$\begin{aligned} &\frac{a}{a^2(a+b+c)+1+abc} + \frac{b}{b^2(a+b+c)+1+abc} + \frac{c}{c^2(a+b+c)+1+abc} \\ &= \frac{1}{(a+b+c)(a+b)} \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right) = \frac{a(a+b) + b(a+c)}{(a+b+c)(a+b)(a+c)(b+c)} \\ &= \frac{(a+b+c)[a(a+b) + b(a+c)]}{(a+b+c)^2} = \frac{1+abc+ab(a+b+c)}{(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

2

CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC VÀ CÔNG NGHỆ MATHTECH
 Hotline: 0946.20.18.81
 Website: www.mathtech.vn



2. Đặt $x + 2y = a, xy = b$, với $a^2 \geq 8b$.
 Khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} a^2 + 2b^2 &= 11 & (1) \\ 3ab + 31 &= 9a + 13b & (2) \end{aligned}$$

Xét phương trình (2), có $3a(b-3) = 13b - 31$. Vì $b = 3$ không phải là nghiệm nên $a = \frac{13b-31}{3(b-3)}$.

Thay vào phương trình (1), thu được

$$9b^4 - 54b^3 + 116b^2 - 106b + 35 = 0 \Leftrightarrow (b-1)^2(3b-5)(3b-7) = 0.$$

Với $b = 1$, thay vào phương trình (2) thì $a = 3$, khi đó

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ xy &= 1 \end{aligned}$$

Từ đó tính được $x = 1; y = 1$ hoặc $x = 2; y = \frac{1}{2}$.

Với $b = \frac{5}{3}$ thì $a = \frac{7}{3}$ (loại do $a^2 < 8b$).

Với $b = \frac{7}{3}$ thì $a = \frac{1}{3}$ (loại do $a^2 < 8b$).

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $S = \left\{ (1;1), \left(2; \frac{1}{2}\right) \right\}$. □

Bài II (2,0 điểm).

- Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $3^x + 29 = 2^y$.
- Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $2(a+b+c) + ab + bc + ca = 9$.
 Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$M = \frac{a+1}{a^2+10a+21} + \frac{b+1}{b^2+10b+21} + \frac{c+1}{c^2+10c+21}.$$

Phân tích. Ý 1 ta sẽ nghĩ đến việc xét số dư của hai vế

Lời giải.

- Nếu $x = 1$ thì $y = 5$
 Nếu $x \geq 2$ thì $2^y = 3^x + 29 \equiv 2 \pmod{9}$
 suy ra $y \equiv 1 \pmod{6}$ mà $2^6 \equiv 1 \pmod{7}$ nên $2^y \equiv 2 \pmod{7}$
 suy ra $3^x \equiv 1 \pmod{7}$ dẫn đến $x \equiv 0 \pmod{6}$
 suy ra $3^x \equiv 1 \pmod{13}$ (do $3^6 \equiv 1 \pmod{13}$) nên $.9 \equiv 4 \pmod{13}$ (1)

3

CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC VÀ CÔNG NGHỆ MATHTECH
 Hotline: 0946.20.18.81
 Website: www.mathtech.vn

MATHTECH

Mặt khác: $y \equiv 1 \pmod{6}$ mà $2^6 \equiv -1 \pmod{13}$ ta suy ra được

$$2^x \equiv \pm 2 \pmod{13} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra vô lí.

Vậy $(x, y) = (1, 5)$.

- Xét $\frac{a+1}{a^2+10a+21} = \frac{a+1}{(a+3)(a+7)}$.
 Đặt $a+1 = t$, với $t > 0$, khi đó $\frac{a+1}{(a+3)(a+7)} = \frac{t}{(t+2)(t+4)} = \frac{t}{(t^2+4)+8t+8}$
 $(t-2)^2 \geq 0 \forall t > 0$ nên $t^2 + 4 \geq 4t$
 Do đó $\frac{t}{(t^2+4)+8t+8} \leq \frac{t}{12t+8} = \frac{1}{12} \cdot \frac{3a+3}{3a+5} = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{2}{3a+5}\right)$
 Hay $\frac{a+1}{a^2+10a+21} \leq \frac{1}{12} \cdot \left(1 - \frac{2}{3a+5}\right)$
 Tương tự ta có $M \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3a+5} + \frac{1}{3b+5} + \frac{1}{3c+5}\right)$
 Áp dụng bất đẳng thức *Schwarz*, có $\frac{1}{3a+5} + \frac{1}{3b+5} + \frac{1}{3c+5} \geq \frac{\left(1+\frac{1}{8}\right)^2}{3a+6} = \frac{\left(1+\frac{1}{8}\right)^2}{3} \cdot \frac{1}{a+2}$ hay
 $\frac{1}{3a+5} \geq \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{a+2} - \frac{1}{64}$
 Tương tự, có $\frac{1}{3a+5} + \frac{1}{3b+5} + \frac{1}{3c+5} \geq \frac{27}{64} \cdot \left(\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}\right) - \frac{3}{64}$
 Xét

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2} &= \frac{ab+bc+ca+4(a+b+c)+12}{abc+2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)+8} \\ &= \frac{21+2(a+b+c)}{abc+26} \end{aligned}$$

Có $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$, khi đó $9 \leq 2(a+b+c) + \frac{(a+b+c)^2}{3}$, suy ra $a+b+c \geq 3$

Có $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$, $2(a+b+c) \geq 2.3\sqrt[3]{abc}$, từ đó $abc \leq 1$

Suy ra $\frac{21+2(a+b+c)}{abc+26} \geq 1$

Do đó $M \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \cdot \frac{24}{64} = \frac{3}{16}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của $M = \frac{3}{16}$ khi $a = b = c = 1$. □

4

CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC VÀ CÔNG NGHỆ MATHTECH
 Hotline: 0946.20.18.81
 Website: www.mathtech.vn



Do $x \geq 1$ nên $2^x = 3^x + 29 \geq 3 + 29 = 32$ suy ra $y \geq 5$. Ta có:

$$3(3^{x-1} - 1) = 32(2^{y-5} - 1).$$

Đặt $x - 1 = m$, $y - 5 = n$ thì $m, n \geq 0$ và phương trình trở thành:

$$3(3^m - 1) = 32(2^n - 1).$$

Ta có: $3^m - 1 : 32$, suy ra $m : 8$.

Vì m chia hết cho 8 nên $3^m - 1 : 3^8 - 1 : 41$, suy ra $2^n - 1 : 41$, nên $n : 20$.

Vì n chia hết cho 5 nên $2^n - 1 : 2^5 - 1 : 31$, suy ra $3^m - 1 : 31$, nên $m : 30$.

Vì m chia hết cho 3 nên $3^m - 1 : 3^3 - 1 : 13$, suy ra $2^n - 1 : 13$, kéo theo $n : 12$, từ đó $2^n - 1 : 2^6 - 1 : 9$, suy ra $3^m - 1 : 3$.

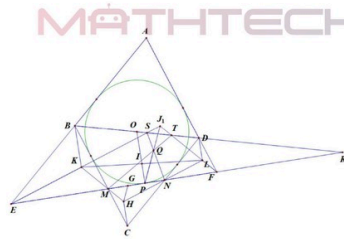
Điều này chỉ xảy ra khi $m = 0$ và khi đó $n = 0$. Vậy $(x, y) = (1, 5)$.

Bài III (3,0 điểm). Cho hình thoi $ABCD$ ($\widehat{BAD} < 90^\circ$) có đường tròn nội tiếp (O). Các điểm M, N lần lượt thuộc cạnh CB, CD sao cho MN tiếp xúc (O) tại P , và tam giác CMN nhọn, không cân. Đường thẳng MN lần lượt cắt các đường thẳng AB, AD tại E, F . Gọi K, L theo thứ tự là trực tâm của tam giác BME, DNF .

- Chứng minh rằng OP đi qua trung điểm I của KL .
- Gọi H là trực tâm tam giác CMN . Chứng minh rằng:

$$\frac{OI}{CH} = \frac{EF}{2MN} = \frac{1}{2}.$$
- Gọi giao điểm của EK, FL với BD lần lượt là S, T . Gọi giao điểm của NS và MT là Q . Đường tròn nội tiếp của tam giác CMN tiếp xúc MN tại G . Chứng minh rằng hai đường thẳng PQ và GH song song.

Phân tích.



Lời giải.

- Ta có BK, DL cùng vuông góc với EF nên $BK // DL$. Mà $OP \perp EF$ nên $BK // OP // DL$. Mà BD có trung điểm là O nên theo định lý Thales ta có OP song song với 2 đáy của hình thang và cắt hai cạnh bên thì nó định chia cạnh bên đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, ta có OP đi qua trung điểm I của KL .

5

CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC VÀ CÔNG NGHỆ MATHTECH
Hotline: 0946.20.18.81
Website: www.mathtech.vn

MATHTECH

- Từ các quan hệ song song, không khó để nhận ra $\triangle BEM \sim \triangle CNM \sim \triangle DNF \sim \triangle AEF$ (góc-góc).

Từ đó, do quan hệ đồng dạng bảo toàn các tỉ số, nên ta có

$$\frac{OI}{CH} = \frac{BK + DL}{2CH} = \frac{EM + FN}{2MN}.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{OI}{CH} + \frac{1}{2} = \frac{EM + FN}{2MN} + \frac{1}{2} = \frac{EM + FN + MN}{2MN} = \frac{EF}{2MN}.$$

- Gọi J_1 là giao điểm của TF và QP , J_2 là giao điểm của SE và QP .

Ta chứng minh $J_1 \equiv J_2$ bằng cách chứng minh $\frac{QJ_1}{PJ_1} = \frac{QJ_2}{PJ_2}$ (*)

Áp dụng định lý Menelaus, cho $\triangle QMP$ có $T \in QM, J_1 \in OP, F \in MP$ thẳng hàng:

$$\frac{TQ}{TM} \cdot \frac{J_1P}{J_1Q} \cdot \frac{FM}{FP} = 1 \Leftrightarrow \frac{J_1P}{J_1Q} = \frac{TM}{TQ} \cdot \frac{FP}{FM} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\frac{J_2P}{J_2Q} = \frac{SN}{SQ} \cdot \frac{EP}{EN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), để chứng minh (*), ta cần chứng minh:

$$\frac{TM}{TQ} \cdot \frac{FP}{FM} = \frac{SN}{SQ} \cdot \frac{EP}{EN} \Leftrightarrow \frac{TM}{TQ} \cdot \frac{SQ}{SN} = \frac{EP}{EN} \cdot \frac{FM}{FP} \quad (**)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle QMN$ có $T \in QM, S \in QN, R = BD \cap MN \in MN$ và $\triangle CMN$ có $B \in CM, D \in CN, R \in MN$

$$\frac{TM}{TQ} \cdot \frac{SQ}{SN} = \frac{RM}{RN} = \frac{DC}{DN} \cdot \frac{BM}{BC} = \frac{BM}{DN}.$$

Để chứng minh (1) ta cần chứng minh

$$\frac{BM}{DN} = \frac{EP}{EN} \cdot \frac{FM}{FP} \quad (***)$$

Ta có: $\frac{EP}{EN} = \frac{EP \cdot PN}{EN \cdot PN}$. Do EO là phân giác góc $\widehat{AEN}$, NO là phân giác góc $\widehat{DNE}$ mà $DN // AE$ nên $OE \perp ON$.

Từ đó suy ra $EP \cdot PN = OP^2, EN \cdot PN = ON^2$ Suy ra

$$\frac{EP}{EN} = \frac{OP^2}{ON^2}$$

Chứng minh tương tự, $\triangle OFM$ vuông tại O và

$$\frac{FM}{FP} = \frac{OM^2}{OP^2}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{EP}{EN} \cdot \frac{FM}{FP} = \frac{OM^2}{ON^2} \quad (3)$$

6

CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC VÀ CÔNG NGHỆ MATHTECH
Hotline: 0946.20.18.81
Website: www.mathtech.vn



$$\widehat{MON} = 90^\circ - \frac{\widehat{BCD}}{2} = \widehat{MBO}$$

Mà MO là phân giác của $\widehat{BMN}$ nên $\triangle BMO \sim \triangle OMN$ (góc-góc).
 Chứng minh tương tự, ta có $\triangle DON \sim \triangle OMN$ (góc-góc).
 Suy ra, $\triangle BMO \sim \triangle DON$. Suy ra

$$\frac{BM}{DO} = \frac{BO}{DN} = \frac{OM}{ON}$$

Suy ra

$$\frac{BM}{DO} \cdot \frac{BO}{DN} = \frac{OM^2}{ON^2}$$

Suy ra

$$\frac{BM}{DN} = \frac{OM^2}{ON^2} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra (***). Do đó, (*) đúng. Từ đó ta có $I_1 \equiv I_2$ nên PQ, TF, SE đồng quy.
 Vì $TF \perp AE, SE \perp AF$ nên PQ đi qua trực tâm $\triangle AEF$ (i).
 Mặt khác, $\triangle AEF \sim \triangle CNM$ (có các cạnh đối song song) nên từ (i), ta có $PQ // GH$. $\square$

Bình luận. Với ý 3, có vẻ sẽ hơi khó để tìm ra mối quan hệ giữa các cặp điểm S, N và T, M .
 Có lẽ, các đơn giản nhất để xử lý các bài mà chúng ta chưa thể tìm ra mối quan hệ một cách
 đẹp đẽ giữa các điểm, đó là ta sẽ sử dụng các định lý thiên về mặt tính toán như Menelaus
 hay Ceva.

Bài IV (1,0 điểm).

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ là những số thực thỏa mãn

$$\frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{a_{2021}}{1+a_{2021}^2} = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k ($1 \leq k \leq 2021$) sao cho

$$\left| \frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{2a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{ka_k}{1+a_k^2} \right| \leq \frac{2k+1}{8}.$$

Phân tích.

Lời giải. Đặt $x_1 = \frac{a_1}{1+a_1^2}, x_2 = \frac{a_2}{1+a_2^2}, \dots, x_{2021} = \frac{a_{2021}}{1+a_{2021}^2}$. Dễ có $x_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Theo giả
 thiết, ta có:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2021} = 0. \quad (*)$$

Giả sử không tồn tại k sao cho

$$\left| \frac{a_1}{1+a_1^2} + \frac{2a_2}{1+a_2^2} + \dots + \frac{ka_k}{1+a_k^2} \right| \leq \frac{2k+1}{8}.$$

7

CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC VÀ CÔNG NGHỆ MATHTECH
 Hotline: 0946.20.18.81
 Website: www.mathtech.vn

MATHTECH

Tức là với mọi k , ta có:

$$|x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k| > \frac{2k+1}{8},$$

với điều kiện (*): $x_1 + x_2 + \dots + x_{2021} = 0$.

Xét trường hợp 1, $x_1 \geq 0$. Theo giả thiết phản chứng, chúng ta có:

$$1. |x_1| > \frac{3}{8} \text{ kéo theo } x_1 > 0.$$

$$2. |x_1 + 2x_2| > \frac{5}{8} \text{ kéo theo } x_2 > 0. \text{ Thật vậy, nếu } x_2 < 0, \text{ thì}$$

$$|x_1 + 2x_2| = 2x_2 - x_1 < 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{8} < \frac{5}{8}.$$

$$3. \text{ Sử dụng phương pháp trên ta có thể chứng minh được } (x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k) > \frac{2k+1}{8}.$$

Ta có

$$|x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k + (k+1)x_{k+1}| > \frac{2(k+1)+1}{8}.$$

Suy ra

$$x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k > \frac{2k+1}{8}.$$

Xét

$$|x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k + (k+1)x_{k+1}| > \frac{2(k+1)+1}{8}.$$

Nếu

$$x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k + (k+1)x_{k+1} < -\frac{2(k+1)+1}{8},$$

thì

$$(k+1)x_{k+1} + \frac{2k+1}{8} < -\frac{2k+3}{8},$$

kéo theo $x_{k+1} < -\frac{1}{2}$ vô lý. Do đó

$$x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k + (k+1)x_{k+1} > \frac{2(k+1)+1}{8}.$$

Khi đó ta có hệ BDT và điều kiện sau:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2021} = 0$$

$$s_1 = x_1 > \frac{3}{8}$$

$$s_2 = x_1 + 2x_2 > \frac{5}{8}$$

...

$$s_k = x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k > \frac{2k+1}{8}$$

...

$$s_n = x_1 + 2x_2 + \dots + 2021x_{2021} > \frac{2 \cdot 2021 + 1}{8}$$

Khi đó,

$$x_k = \frac{s_k - s_{k-1}}{k}.$$

8

CÔNG TY CỔ PHẦN GIÁO DỤC VÀ CÔNG NGHỆ MATHTECH
 Hotline: 0946.20.18.81
 Website: www.mathtech.vn



$$\begin{aligned}
0 &= x_1 + x_2 + \dots + x_{2021} \\
&= s_1 + \frac{s_2 - s_1}{2} + \dots + \frac{s_k - s_{k-1}}{k} + \frac{s_{2021} - s_{2020}}{2021} \\
&= \frac{s_1}{1 \cdot 2} + \frac{s_2}{2 \cdot 3} + \frac{s_3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{s_k}{k \cdot (k+1)} + \dots + \frac{s_{2020}}{2020 \cdot (2021)} + \frac{s_{2021}}{2021} > 0.
\end{aligned}$$

Suy ra vô lí.

Trường hợp $x_1 < 0$ tương tự.

Ta có điều phải chứng minh. □

Bình luận. Đây là một bài toán hay, đòi hỏi tư duy sâu.

