

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG BÌNH**

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Câu 1. (2,0 điểm)**

**ĐỀ THI TUYỂN SINH THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2022-2023
Môn thi : TOÁN CHUYÊN
Thời gian làm bài : 150 phút**

Cho biểu thức $P = \frac{3x+5\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - 1$ (với $0 \leq x \neq 1$)

- a) Rút gọn biểu thức P
- b) Tìm x để P chia hết cho 3

Câu 2. (2,0 điểm)

- a) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 3 = 0$ (1) (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 5$
- b) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-5} = 4$

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c$$

Câu 4. (1,5 điểm)

Tìm $n \in \mathbb{N}$ để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 5. (3,5 điểm)

Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của AN, C là giao điểm của ME với (O) (C khác M) và H là giao điểm của MN và AO

- a) Chứng minh tứ giác $HCEN$ nội tiếp
- b) Gọi D là giao điểm của AC với (O) (D với C). Chứng minh tam giác MND là tam giác cân
- c) Gọi I là giao điểm của NO với (O) (I khác N); K là giao điểm của MD và AI .

Tính tỉ số $\frac{KM}{KD}$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{3x+5\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - 1$ (với $0 \leq x \neq 1$)

c) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned} P &= \frac{3x+5\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2} - 1 \\ &= \frac{3x+5\sqrt{x}-11-x+4+2\sqrt{x}-2-x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-6\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+7)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

d) Tìm x để P chia hết cho 3

$$\text{Ta có : } P = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}+2} \Rightarrow 1 < P \leq 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \quad (\forall 0 \leq x \neq 1)$$

$$\text{Biểu thức } P \text{ chia hết cho } 3 \Leftrightarrow P = 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x}+7 = 3\sqrt{x}+6 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{4}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

c) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x - 3 = 0$ (1) (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

Vì $\Delta > 0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m

$$\text{Theo hệ thức Vi-et ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 & (2) \\ x_1 x_2 = -3 & (3) \end{cases}$$

Kết hợp $x_1 + 2x_2 = 5$ với (2) ta được $x_1 = 4m - 9$; $x_2 = 7 - 2m$

Thay vào (3) ta được :

$$(4m-9)(7-2m) = -3 \Leftrightarrow -8m^2 + 46m - 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{15}{4} \end{cases}$$

d) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-5} = 4$

Điều kiện : $x \geq \frac{5}{3}$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{3x-5} = 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 2) + (\sqrt{3x-5} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{3(x-3)}{\sqrt{3x-5}+2} = 0 \Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x-5}+2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x-5}+2} = 0(VN) \end{cases}$$

Vậy $x=3$

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = a+b-c > 0 \\ y = b+c-a > 0 \\ z = c+a-b > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+z}{2} \\ b = \frac{x+y}{2}; c = \frac{y+z}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta cần chứng minh : } \frac{(x+y)^2}{4z} + \frac{(y+z)^2}{4x} + \frac{(z+x)^2}{4y} \geq x+y+z$$

$$\text{Ta có : } \frac{(x+y)^2}{4z} + \frac{(y+z)^2}{4x} + \frac{(z+x)^2}{4y} \geq \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác : } \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} \geq 2y; \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 2z; \frac{xy}{z} + \frac{zx}{y} \geq 2x$$

$$\text{Khi đó } \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq x+y+z \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có : } \frac{(x+y)^2}{4z} + \frac{(y+z)^2}{4x} + \frac{(z+x)^2}{4y} \geq x+y+z$$

$$\text{Vậy } \frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geq a+b+c. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } a=b=c$$

Câu 4. (1,5 điểm)

Tìm $n \in \mathbb{Q}$ để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Với $n \in \mathbb{N}$, ta có : $n^5 + 1 : n^3 + 1 \Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : n^3 + 1$

$$\Leftrightarrow (n^2 - 1) : n^3 + 1 \Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) : (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n-1:n^2-n+1 \text{ (do } n+1 \neq 0)$$

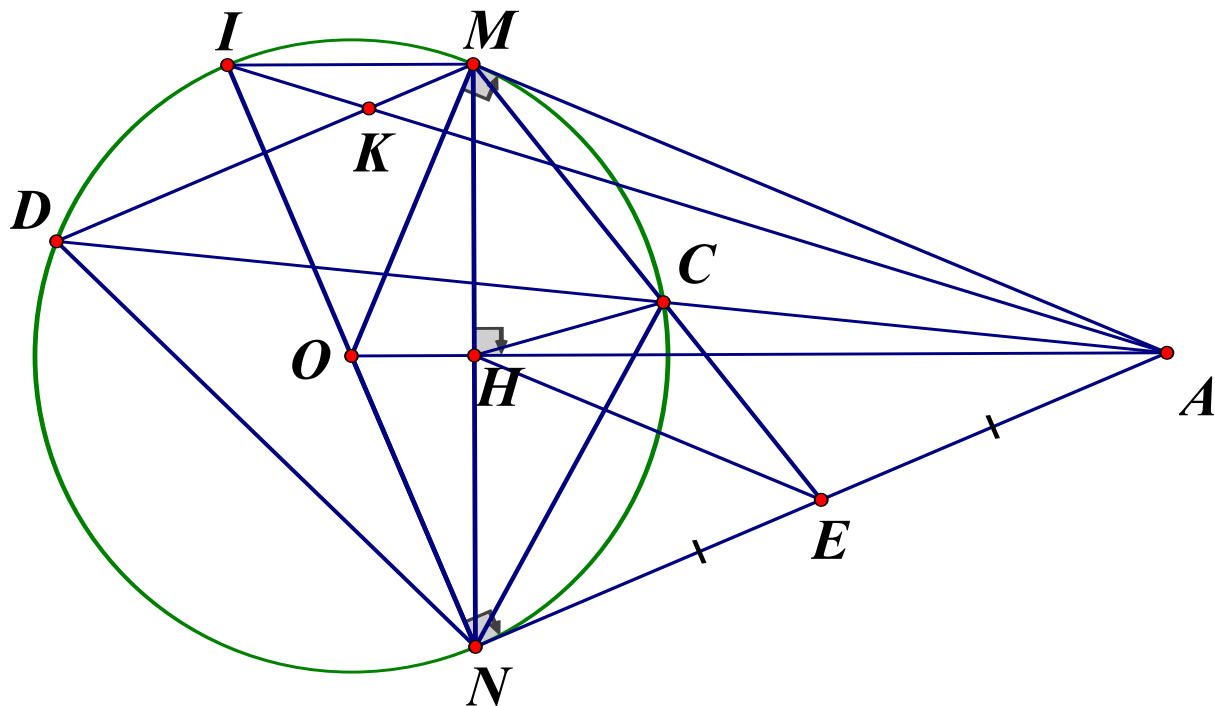
$$\Rightarrow n(n-1):n^2-n+1 \Leftrightarrow (n^2-n+1)-1:n^2-n+1$$

$$\Leftrightarrow 1:n^2-n+1 \Rightarrow \begin{bmatrix} n^2-n+1=1 \\ n^2-n+1=-1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} n=1 \\ n=0 \end{bmatrix} (tm)$$

$$V_{\hat{y}} \quad n=0, n=1$$

Câu 5. (3,5 điểm)

Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của AN, C là giao điểm của ME với (O) (C khác M) và H là giao điểm của MN và AO



d) Chứng minh tứ giác $HCEN$ nội tiếp

Ta có AM, AN là hai tiếp tuyến cắt nhau nên OA là đường phân giác của $\angle MON$
 $\triangle MON$ cân tại O, có OA là đường phân giác nên OA đồng thời cũng là đường trung
 trực ứng với $MN \Rightarrow MH = HN; OA \perp MN$

Vì $MN = HN, AE = EN$ nên HE là đường trung bình của $\triangle MAN$

$\Rightarrow HE // MA \Rightarrow \angle HEM = \angle AME$ mà $\angle MNC = \angle AME$ (cùng chắn $\overline{MC}$)

Nên $\angle MNC = \angle HEM$ suy ra tứ giác $HCEN$ nội tiếp

e) Gọi D là giao điểm của AC với (O) (D với C). Chứng minh tam giác MND là tam giác cân

$$\triangle ENC \sim \triangle EMN (g.g) \Rightarrow \frac{EN}{EM} = \frac{EC}{EN} \text{ mà } EN = EA \text{ nên } \frac{EA}{EM} = \frac{EC}{EA}$$

$$\triangle ECA \text{ và } \triangle EAM \text{ có : } \frac{EA}{EM} = \frac{EC}{EA} \text{ và } \angle AEC \text{ chung} \Rightarrow \triangle ECA \sim \triangle EAM \Rightarrow \angle EAC = \angle EMA$$

Lại có $\angle EMA = \angle MDC$ (cùng chắn $\overline{MC}$) nên $\angle EAC = \angle MDC$

Suy ra $MD // AN \Rightarrow \angle DMN = \angle MNA$

Mặt khác, $\angle MDN = \angle MNA$ (cùng chắn cung MN)

$\Rightarrow \angle MDN = \angle DMN$. Do đó $\triangle MND$ cân tại N

f) Gọi I là giao điểm của NO với (O) (I khác N); K là giao điểm của MD và

$$AI. \text{ Tính tỉ số } \frac{KM}{KD}$$

Gọi L là giao điểm của MD, NI

Vì $MD // AN$ (cmt), $IN \perp AN$ (tính chất tiếp tuyến)

$$\text{Nên } IN \perp MD \text{ tại } L \Rightarrow DL = ML = \frac{MD}{2}$$

$$\triangle INA \text{ có } LK // AN \Rightarrow \frac{LK}{AN} = \frac{IL}{IN} \quad (1)$$

Ta có $IM // AO$ (cùng vuông góc với MN), suy ra $\angle MIL = \angle AON$

Lại có $\angle MLI = \angle ONA = 90^\circ$ nên $\triangle MIL \sim \triangle AON (g.g)$

$$\text{Suy ra } \frac{IL}{NO} = \frac{ML}{AN} \Rightarrow \frac{IL}{2NO} = \frac{ML}{2AN} \Rightarrow \frac{IL}{IN} = \frac{ML}{2AN} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{LK}{AN} = \frac{ML}{2AN} \Rightarrow LK = \frac{ML}{2} \Rightarrow MK = KL = \frac{ML}{2}$$

$$\text{Vì } MK = LK, ML = DL \Rightarrow KD = 3KM \Rightarrow \frac{KM}{KD} = \frac{1}{3}$$