

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2023-2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

MÔN TOÁN

Ngày thi: Thứ ba 19/9/2023

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 1. (5 điểm) Cho dãy (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + \frac{\ln n}{u_n}, \forall n \geq 1$

a) Chứng minh rằng $u_{2023} > \sqrt{2023 \cdot \ln 2023}$.

b) Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n \cdot \ln n}{n}$.

Bài 2. (5 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời $f(x+1) = f(x) + 1$ và

$$f(x^{2024} + x^{2023} + \dots + x + 1) = (f(x))^{2024} + (f(x))^{2023} + \dots + f(x) + 1$$

với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3. (5 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm P cố định nằm ngoài đường tròn. Từ P vẽ các tiếp tuyến PA, PB đến (O) (A, B là tiếp điểm). C là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của (O) . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt PA, PB, PO lần lượt tại D, E và F .

a) Chứng minh rằng đường thẳng qua tâm của (PDE) và tâm của (PCF) luôn đi qua một điểm cố định.

b) Từ O vẽ các tiếp tuyến OX, OY đến (PDE) (X, Y là tiếp điểm). Từ O vẽ các tiếp tuyến OU, OV đến (PCF) (U, V là các tiếp điểm). Chứng minh rằng giao điểm của XY và UV thuộc một đường thẳng cố định.

Chú ý: Kí hiệu (ABC) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Bài 4. (5 điểm) Cho n là một số nguyên dương. Một bảng ô vuông gồm n hàng và n cột gồm n^2 ô vuông đơn vị ta gọi là một bảng $n \times n$.

Với mỗi số nguyên k ($1 \leq k \leq n$), trên mỗi hàng ta chọn k hàng liên tiếp và trên mỗi cột ta chọn k cột liên tiếp, khi đó k^2 ô vuông nằm ở phần giao nhau ta gọi là một bảng con $k \times k$ của bảng $n \times n$ ban đầu.

a) Điền các số $1, 2, 3, \dots, 81$ vào bảng 9×9 . Chứng minh rằng tồn tại bảng con 2×2 có tổng của 4 số được điền trong nó lớn hơn 137.

b) Giả sử n là số lẻ. Mỗi ô vuông đơn vị của bảng $n \times n$ ta điền một số thuộc $\{-1; 0; 1\}$ sao cho mỗi bảng con 2×2 có tổng của 4 số được điền trong nó là 0. Gọi S là tổng của n^2 số trong bảng $n \times n$. Tìm giá trị lớn nhất của S .

-HẾT-

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN NĂM HỌC 2023-2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP.HCM

MÔN TOÁN

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

Ngày thi: Thứ năm 21/9/2023

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Bài 5. (6 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 1$.
Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3} + \sqrt[4]{c^3} \geq \sqrt[8]{243}.$$

Bài 6. (7 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H, D, E, F lần lượt là trực tâm và chân các đường cao qua A, B, C . L, M, N tương ứng là giao điểm của AO với EF, BE, CF . Đường tròn qua A , trung điểm I của EF và trung điểm P của AH cắt lại đường tròn (AEF) tại K .

- Chứng minh AK đi qua tâm J của đường tròn (HMN) .
- Các tiếp tuyến tại E và F của các đường tròn (EDL) và (FDL) cắt nhau tại T . Chứng minh TH và AJ cắt nhau trên BC .

Bài 7. (7 điểm) Cho hai số nguyên dương $m, n \geq 2$. Tìm số nguyên dương k lớn nhất để tồn tại các số thực $a_1, a_2, \dots, a_k$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- Với $1 \leq l \leq k - m$ thì $a_{l+1} + a_{l+2} + \dots + a_{l+m} > 0$.
- Với $1 \leq l \leq k - n$ thì $a_{l+1} + a_{l+2} + \dots + a_{l+n} < 0$.

-HẾT-