

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (1,5 điểm)

- 1) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{x}{x - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$
- 2) Tìm m để ba đường thẳng $(d_1): y = 2x + 1, (d_2): y = -x + 7$ và $(d_3): y = mx + m - 4$ đồng quy

Bài 2. (1,5 điểm)

1. Chứng minh rằng $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ chia hết cho 24 với mọi số nguyên n
2. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $25n^2 + 10n + 48$ là tích của hai số nguyên dương chẵn liên tiếp

Bài 3. (2,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2x - xy + 2y = 0 \\ x + y = xy - 5 \end{cases}$$
2. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2^2 - 2mx_2 + m^2) = 1$
3. Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 10$ và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 28$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = ab + ac + ad$

Bài 4. (3,5 điểm) Cho đường tròn tâm O, bán kính R và hai điểm B, C cố định trên (O), $BC = R$. Điểm A thay đổi trên cung lớn $\widehat{BC}$ của (O) sao cho $AB < AC$. Đường thẳng qua B và vuông góc với AC tại K cắt đường tròn (O) sao cho $AB < AC$. Đường thẳng qua B và vuông góc với AC tại K cắt đường tròn (O) tại P (P khác B). Kẻ PQ vuông góc với đường thẳng BC tại Q. Tia phân giác trong của $\angle BAC$ cắt cạnh BC tại D. Tiếp tuyến tại A của (O) của đường thẳng BC tại M.

- a) Chứng minh $\angle ABK = \angle KQP$ và $\frac{MB}{MC} = \left(\frac{DB}{DC} \right)^2$
- b) Khi A đối xứng với C qua O, tính diện tích tứ giác AMDO theo R
- c) Tia AD cắt đường tròn (O) tại E (khác A). Lấy điểm I trên đoạn thẳng AE sao cho $EI = EB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại L (khác B). Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với LE cắt đường thẳng LC tại F. Xác định vị trí điểm A để độ dài BF lớn nhất

Bài 5. (1,0 điểm) Một số nguyên dương được gọi là “số đặc biệt” nếu nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

- i) Các chữ số của nó đều khác 0
 - ii) Số đó chia hết cho 12, và nếu đổi chỗ các chữ số của nó một cách tùy ý, ta vẫn thu được một số chia hết cho 12
- a) Chứng tỏ rằng số đặc biệt chỉ có thể chứa các chữ số 4 hoặc 8

b) Có tất cả bao nhiêu “số đặc biệt” có 5 chữ số

ĐÁP ÁN

Bài 1. (1,5 điểm)

3) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{x}{x - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{x}{x - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2} \\ &= \frac{(x - \sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x}) - (x - \sqrt{x} - 2)x}{(x - \sqrt{x} - 2)(x - 2\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)^2} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2}{1 - \sqrt{x}} \end{aligned}$$

4) Tìm m để ba đường thẳng $(d_1): y = 2x + 1, (d_2): y = -x + 7$ và $(d_3): y = mx + m - 4$ đồng quy

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) ta có :

$$2x + 1 = -x + 7 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 5$$

Đề $(d_1), (d_2), (d_3)$ đồng quy thì $(d_3): y = mx + m - 4$ phải đi qua điểm $(2; 5)$ khi đó :

$$5 = 2m + m - 4 \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy $m = 3$ thì thỏa đề

Bài 2. (1,5 điểm)

1. Chứng minh rằng $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ chia hết cho 24 với mọi số nguyên n

$$\text{Ta có : } n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = (n^3 - n)(n + 2) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2)$$

Ta thấy $(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ là tích 4 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 8

Đồng thời, trong 4 số liên tiếp có 1 số chia hết cho 3 nên tích chia hết cho 3

Mà $(3, 8) = 1$ nên tích trên luôn chia hết cho 24 (đpcm)

2. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $25n^2 + 10n + 48$ là tích của hai số nguyên dương chẵn liên tiếp

Gọi hai số chẵn liên tiếp lần lượt là $2k$ và $2k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^+$. Theo đề bài ta có phương trình sau :

$$25n^2 + 10n + 48 = 2k(2k + 2) \Rightarrow 5n(5n + 2) + 48 = 4k(k + 1)$$

Vì $k(k + 1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên

$$k(k + 1) : 2 \Rightarrow 4k(k + 1) : 8 \Rightarrow 5n(5n + 2) + 48 : 8 \text{ mà } 48 : 8 \text{ nên ta có } 5n(5n + 2) : 8 \text{ mà } 5n \text{ và}$$

$5n + 2$ cách nhau 2 đơn vị nên cùng chẵn hoặc cùng lẻ. nên để chia hết cho 8 thì chỉ có thể là cùng chẵn. Do đó $5n$ chẵn hay n chẵn

Đặt $n = 2m (m \in \mathbb{N}^+)$. Từ đó ta có (1) tương đương với

$$\begin{aligned}
10m(10m+2)+48 &= 4k(k+1) \Leftrightarrow 5m(5m+1)+12 = k(k+1) \\
&\Leftrightarrow 25m^2+5m+12 = k^2+k \Leftrightarrow (5m-k)(5m+k)+(5m-k)+12=0 \\
&\Leftrightarrow (5m-k)(5m+k+1)=-12
\end{aligned}$$

Vì $5m-k < 5m+k+1$ nên ta có các trường hợp sau :

$$\begin{aligned}
1) \begin{cases} 5m-k=-4 \\ 5m+k+1=3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{1}{5}(k+4) \\ k=3 \end{cases} \\
2) \begin{cases} 5m-k=-2 \\ 5m+k+1=6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m=-\frac{3}{10}(k+5) \\ k=\frac{7}{2} \end{cases} & 3) \begin{cases} 5m-k=-1 \\ 5m+k+1=12 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ k=6 \end{cases}
\end{aligned}$$

Trong 3 trường hợp, chỉ có trường hợp (3) thỏa mãn, do đó $n = 2m = 2.1 = 2$

Vậy $n = 2$

Bài 3. (2,5 điểm)

4. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 2x - xy + 2y = 0 \\ x + y = xy - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x - xy + 2y = 0 & (1) \\ x + y = xy - 5 & (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (1) ta thấy :

$$\begin{aligned}
x^2 - 2x - xy + 2y &= 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \Rightarrow 2x = x^2 - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 + \sqrt{6} \\ x = y = 1 - \sqrt{6} \end{cases} \\ x = 2 \Rightarrow 2 + y = xy - 5 \Leftrightarrow y = 7 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = \{(1-\sqrt{6}; 1-\sqrt{6}); (1+\sqrt{6}; 1+\sqrt{6}); (2; 7)\}$

5. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2^2 - 2mx_2 + m^2) = 1$$

Ta có : $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0$ (1)

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' = -2m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < 2$

Theo hệ thức Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình nên ta có :

$$\begin{cases} x_1^2 - 2(m-1)x_1 + m^2 - 3 = 0 \\ x_2^2 - 2(m-1)x_2 + m^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + m^2 = 3 - 2x_1 \\ x_2^2 - 2mx_2 + m^2 = 3 - 2x_2 \end{cases}.$$

Theo đề bài, ta có :

$$\begin{aligned} (x_1^2 - 2mx_1 + m^2)(x_2^2 - 2mx_2 + m^2) &= 1 \\ \Leftrightarrow (3 - 2x_1)(3 - 2x_2) &= 1 \Leftrightarrow 8 - 6(x_1 + x_2) + 4x_1x_2 = 0 \\ \Leftrightarrow 8 - 12(m-1) + 4(m^2 - 3) &= 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(tm) \\ m = 2(ktm) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = 1$

6. Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 10$ và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 28$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = ab + ac + ad$

Xét $b^2 + c^2 + d^2$, áp dụng bất Cauchy-Schwartz ta được :

$$\begin{aligned} (b + c + d)^2 &\leq 3(b^2 + c^2 + d^2). \text{ Dấu bằng xảy ra khi } b = c = d \\ \Leftrightarrow (10 - a)^2 &\leq 3(28 - a^2) \Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = (a - 1)(a - 4) \leq 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\leq a \leq 4 \end{aligned}$$

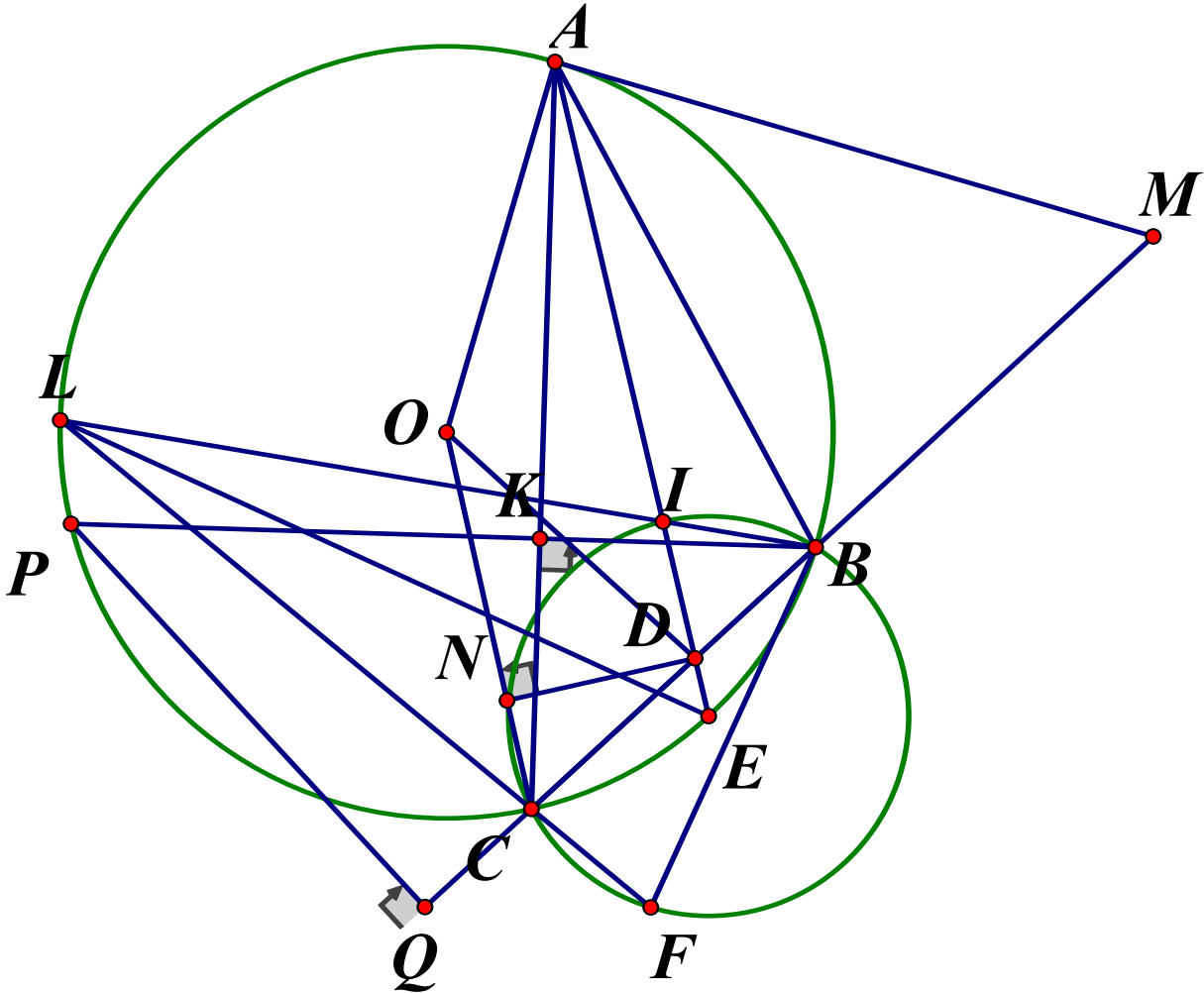
Mặt khác, ta thấy :

$$\begin{aligned} T = ab + ac + ad &= a(b + c + d) = a(10 - a) = 10a - a^2 \\ &= (10a - a^2 - 24) + 24 = (a - 4)(6 - a) + 24 \\ &\leq (4 - 4)(6 - 1) + 24 = 24 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = 4$

Vậy $T_{\max} = 24$ khi $a = 4, b = c = d = 2$

Bài 4. (3,5 điểm) Cho đường tròn tâm O , bán kính R và hai điểm B, C cố định trên (O) , $BC = R$. Điểm A thay đổi trên cung lớn $\widehat{BC}$ của (O) sao cho $AB < AC$. Đường thẳng qua B và vuông góc với AC tại K cắt đường tròn (O) sao cho $AB < AC$. Đường thẳng qua B và vuông góc với AC tại K cắt đường tròn (O) tại P (P khác B). Kẻ PQ vuông góc với đường thẳng BC tại Q . Tia phân giác trong của $\angle BAC$ cắt cạnh BC tại D . Tiếp tuyến tại A của (O) của đường thẳng BC tại M .



d) Chứng minh $\angle ABK = \angle KQP$ và $\frac{MB}{MC} = \left(\frac{DB}{DC}\right)^2$

Ta có $PQ \perp QC$ và $PK \perp KC$ (gt) nên tứ giác $PQCK$ nội tiếp

$\Rightarrow \angle KQP = \angle PCK$ (cùng chắn cung PK) (1)

Ta thấy tứ giác $ABCP$ nội tiếp $(O; R)$ nên $\angle ABP = \angle ACP$ (cùng chắn cung AP) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle KQP = \angle ABK$ ($= \angle PCK$) (dpcm)

Để chứng minh được $\triangle MAB \sim \triangle MCA$ (g.g) nên ta có :

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{MA^2}{MC^2} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{MB.MC}{MC^2} = \frac{DB^2}{DC^2} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \left(\frac{DB}{DC}\right)^2$$

$$\text{Vậy } \frac{MB}{MC} = \left(\frac{DB}{DC}\right)^2 \text{ (đpcm)}$$

e) Khi A đối xứng với C qua O, tính diện tích tứ giác AMDO theo R

Khi A đối xứng với C qua O thì AC là đường kính của (O), do đó $AC = 2R$,

$AO = OC = CB = R$, $\triangle ACB$ vuông tại B nên $AB = \sqrt{AC^2 - CB^2} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$ (định lý Pytago). Đồng thời $AC = 2R = 2BC \Rightarrow \angle ACB = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle MAB = 60^\circ$ (cùng phụ với $\angle BAC$). Ta có :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{AB + AC}{AC} = \frac{BC}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{R\sqrt{3} + 2R}{2R} = \frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{2}{\sqrt{3} + 2} = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow DC = R(4 - 2\sqrt{3})$$

Gọi DN là đường cao trong $\triangle COD$ ($N \in OC$). Ta có :

$$\begin{aligned} S_{AMDO} &= S_{AMB} + S_{ABDO} = \frac{AB.MB}{2} + S_{ABC} - S_{ODC} \\ &= \frac{AB^2 \cdot \tan \angle MAB}{2} + \frac{AB.BC}{2} - \frac{DN.OC}{2} = \frac{3R^2 \cdot \tan 60^\circ}{2} + \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin \angle DCN.DC.R}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} + \frac{R^2\sqrt{3}}{2} - \frac{\sin 60^\circ.R(4 - 2\sqrt{3})R}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2} R^2 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } S_{AMDO} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{2} R^2$$

f) Tia AD cắt đường tròn (O) tại E (khác A). Lấy điểm I trên đoạn thẳng

AE sao cho $EI = EB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại L (khác B).

Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với LE cắt đường thẳng LC tại F. Xác định vị trí điểm A để độ dài BF lớn nhất

Ta có $LE \perp BF$ (gt) (*)

Xét (O): $\angle BAE = \angle BLE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EB, $\angle EAC = \angle ELC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC) mà $\angle BAE = \angle EAC$ (AE là phân giác $\angle BAC$))

Nên $\angle BLE = \angle ELC$ và $EB = EC$ (1) $\Rightarrow LE$ là phân giác của $\angle BLF$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra LE là đường trung trực của $BF \Rightarrow EB = EF$ (2)

Từ (1) và (2) và gt $\Rightarrow EB = EI = EC = EF \Rightarrow B, I, C, F$ nội tiếp ($E; EB$) và BF là dây cung của ($E; EB$)

Do đó để $BF_{\max} \Leftrightarrow BF$ là đường kính của ($E; EB$), xảy ra khi và chỉ khi BP là đường kính của (O; R). Khi đó $K \in OB$ mà $\angle AKB = 90^\circ$ (gt) nên $OB \perp AC$ (3)

Xét (O; R) ta thấy AC là dây cung không đi qua O, vậy nên K là trung điểm AC (4)

Từ (3) và (4) suy ra B là điểm nằm chính giữa cung AC hay $AB = BC$

Vậy với $AB = BC$ hay điểm B nằm chính giữa cung AC thì độ dài BF đạt giá trị lớn nhất.

Bài 5. (1,0 điểm) Một số nguyên dương được gọi là “số đặc biệt” nếu nó thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau

iii) Các chữ số của nó đều khác 0

iv) Số đó chia hết cho 12, và nếu đổi chỗ các chữ số của nó một cách tùy ý, ta vẫn thu được một số chia hết cho 12

c) Chứng tỏ rằng số đặc biệt chỉ có thể chứa các chữ số 4 hoặc 8

Vì số đặc biệt nên nó sẽ chia hết cho 3 và 4

Ta thấy rằng để một số khi đổi các chữ số cho nhau mà chia hết cho 4 thì các chữ số ấy chỉ có thể là số chẵn, mà số đặc biệt là số có chữ số khác 0 nên các chữ số của nó chỉ có thể là 2;4;6;8 (1)

Từ các số 2;4;6;8, ta lập được các số có 2 chữ số sao cho khi đổi chỗ các chữ số cho nhau thì chúng vẫn chia hết cho 4, ta thấy chỉ lập được một số duy nhất thỏa mãn điều kiện là 48 (2)

Từ (1) và (2) suy ra chỉ lập được “số đặc biệt” từ số 4 và 8 (đpcm)

d) Có tất cả bao nhiêu “số đặc biệt” có 5 chữ số

Ta thấy “số đặc biệt” chỉ chứa số 4 và 8 nên ta đặt x là số chữ số 4 còn y là số chữ số 8 để tạo nên “số đặc biệt” có 5 chữ số ($x, y \in \mathbb{N}^+, 1 \leq x, y \leq 4$)

Đồng thời, ta suy được phương trình nghiệm nguyên $x + y = 5$

Cũng từ phương trình trên, ta tìm được các cặp số nguyên $(x; y)$ là $(1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1)$. Vì “số đặc biệt” chia hết cho 3 nên tổng các chữ số của chúng cũng chia hết cho 3 hay $3 \mid (4x + 8y) \Leftrightarrow 3 \mid (3x + 9y) + (x - y)$

Mà $(3x + 9y) : 3 \Rightarrow (x - y) : 3 \Rightarrow (x; y) \in \{(1; 4); (4; 1)\}$

th1: $x = 1, y = 4 \Rightarrow$ Các số là : 48888; 84888; 88488; 88848; 88884 (5 số)

Th2: $x = 4, y = 1$ các số là 44448; 44484; 44844; 48444; 84444 (5 số)

Vậy ta tìm được 10 “số đặc biệt” có 5 chữ số