

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi : TOÁN

Ngày thi : 13 tháng 01 năm 2021

Thời gian làm bài : 150 phút

(Đề thi gồm 01 trang)

Bài I (5,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^2 - x + 8 = 4\sqrt{x+3}$.

2) Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau. Chứng minh biểu thức

$$K = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$
 có giá trị nguyên.

Bài II (5,0 điểm)

1) Biết a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a+b+c$ chia hết cho 3 và $ab-bc-ca$ chia hết cho 3. Chứng minh $ab-bc-ca$ chia hết cho 9.

2) Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax + b$ có nghiệm $1 + \sqrt{3}$ (a, b là các số hữu tỉ). Chứng minh $P(x)$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 2$.

Bài III (2,0 điểm)

Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$.

Bài IV (6,0 điểm)

Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Đường tròn (I) tiếp xúc với BC, CA lần lượt tại D, E . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với BI , cắt AI tại J . Gọi P là hình chiếu vuông góc của J trên BC .

1) Chứng minh $BD = CP$.

2) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng AJ và BC . Chứng minh $\frac{1}{AI} + \frac{1}{AJ} = \frac{2}{AN}$.

3) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng JP và DE . Gọi K là trung điểm của PQ . Chứng minh BK vuông góc với AP .

Bài V (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $3^x + 2^y = 1 + 2^z$.

2) Cho một hình chữ nhật có diện tích bằng 1. Năm điểm phân biệt được đặt tùy ý vào hình chữ nhật sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng (mỗi điểm trong năm điểm đó có thể được đặt trên cạnh hoặc đặt nằm trong hình chữ nhật).

a) Chứng minh mọi tam giác tạo bởi ba điểm trong năm điểm đã cho đều có diện tích không vượt quá $\frac{1}{2}$.

b) Với mỗi cách đặt năm điểm vào hình chữ nhật như trên, gọi N là số tam giác có ba đỉnh là ba điểm trong năm điểm đó và có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của N .

-----Hết-----

Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh :

Số báo danh :