

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TỈNH BÌNH ĐỊNH

.....  
**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KÌ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN  
NĂM HỌC 2023 – 2024**

.....  
**Đề thi môn TOÁN (Chuyên)**  
**Thời gian làm bài: 150 phút**  
**Ngày thi: 06/06/2023**

**Câu 1 (2,5 điểm):**

1. Tính giá trị của biểu thức  $(x^3 + 4x^2 - 23x + 1)^{2024}$  với  $x = 3\sqrt{3} - 2$ .

2.

a) Giả sử phương trình  $x^2 - ax + 2 = 0$  ( $a$  là tham số) có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Tính  $P = x_1^3 + x_2^3$  theo  $a$ .

b) Cho  $\alpha = \sqrt[3]{\frac{8}{3}} + \sqrt[3]{3}$ . Tìm một đa thức bậc 3, hệ số nguyên nhận  $\alpha$  làm nghiệm.

**Câu 2 (2,5 điểm):**

1. Giải phương trình:  $\sqrt{4x-1} - 2\sqrt{4x+1} + \sqrt{16x^2-1} = 2, (x \in \mathbb{R})$ .

2. Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ (x+y)(4+3xy) = -2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Câu 3 (1,0 điểm):** Tìm tất cả giá trị nguyên của  $n$  để  $n^2 + 2026$  là một số chính phương.

**Câu 4 (3,5 điểm):** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có các đường cao  $AD, BE, CF$ . Gọi  $K, L$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác  $CDE, BDF$ .

1. Chứng minh  $\widehat{LDF} = \widehat{KDC}$ .

2. Chứng minh hai tam giác  $LDF$  và  $KDC$  đồng dạng, hai tam giác  $LDK$  và  $FDC$  đồng dạng.

3. Chứng minh tứ giác  $BLKC$  nội tiếp.

4. Gọi  $P, Q$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $AKC, ALB$ , chứng minh  $PQ$  song song với  $KL$ .

**Câu 5 (1,0 điểm):** Một học sinh viết lên bảng một dãy gồm 2023 số nguyên dương sao cho trong dãy này có đúng 10 số hạng phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại những số hạng liên tiếp của dãy này có tích của chúng là một số chính phương.

..... HẾT.....

**HƯỚNG DẪN GIẢI:****Câu 1 (2,5 điểm):**

1. Tính giá trị của biểu thức  $(x^3 + 4x^2 - 23x + 1)^{2024}$  với  $x = 3\sqrt{3} - 2$ .

2.

a) Giả sử phương trình  $x^2 - ax + 2 = 0$  ( $a$  là tham số) có hai nghiệm  $x_1, x_2$ . Tính  $P = x_1^3 + x_2^3$  theo  $a$ .

b) Cho  $\alpha = \sqrt[3]{\frac{8}{3}} + \sqrt[3]{3}$ . Tìm một đa thức bậc 3, hệ số nguyên nhận  $\alpha$  làm nghiệm.

**Giải:**

1. Theo đề  $x = 3\sqrt{3} - 2 \Leftrightarrow x + 2 = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 27 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 23$ .

Ta có  $(x^3 + 4x^2 - 23x + 1)^{2024} = [x \cdot (x^2 + 4x) - 23x + 1]^{2024} = (23x - 23x + 1)^{2024} = 1$ .

Vậy giá trị của biểu thức bằng 1 khi  $x = 3\sqrt{3} - 2$ .

2.

a) Ta có  $\Delta = a^2 - 8$ . Phương trình có hai nghiệm  $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2\sqrt{2} \\ a \leq -2\sqrt{2} \end{cases}$

Áp dụng định lý Vi-ét, ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 \cdot x_2 = 2 \end{cases}$

Theo đề  $P = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = a^3 - 6a$

Vậy  $P = a^3 - 6a$  (với  $a \leq -2\sqrt{2}$  hoặc  $a \geq 2\sqrt{2}$ ).

b) Theo đề  $\alpha = \sqrt[3]{\frac{8}{3}} + \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{8}{3} + 3 + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \left( \sqrt[3]{\frac{8}{3}} + \sqrt[3]{3} \right) \Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{17}{3} + 6\alpha \Leftrightarrow 3\alpha^3 - 18\alpha - 17 = 0$

Do đó  $\alpha$  là nghiệm của phương trình  $3x^3 - 18x - 17 = 0$ .

**Câu 2 (2,5 điểm):**

1. Giải phương trình:  $\sqrt{4x-1} - 2\sqrt{4x+1} + \sqrt{16x^2-1} = 2, (x \in \mathbb{R})$ .

2. Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ (x+y)(4+3xy) = -2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$ .

**Giải:**

1. Điều kiện  $x \geq \frac{1}{4}$

Ta có

$$\sqrt{4x-1} - 2\sqrt{4x+1} + \sqrt{16x^2-1} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{4x-1} - 2) + \sqrt{4x+1}(\sqrt{4x-1} - 2) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{4x-1} - 2)(\sqrt{4x+1} + 1) = 0 \quad (1)$$

Với  $x \geq \frac{1}{4}$  thì  $\sqrt{4x+1} + 1 > 0$ ; do đó  $(1) \Leftrightarrow \sqrt{4x-1} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$  (nhận).

Vậy  $x = \frac{5}{4}$ .

$$2. \text{ Ta có: } \begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ (x+y)(4+3xy) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 7 \\ 4(x+y) + 3xy(x+y) = -2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (x+y)^3 + 4(x+y) - 5 = 0 \Leftrightarrow (x+y-1) \cdot [(x+y)^2 + (x+y) + 5] = 0 \quad (2)$$

$$\text{Vì } (x+y)^2 + (x+y) + 5 = \left(x+y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} > 0 \text{ với mọi } x, y.$$

$$\text{Do đó } (2) \Leftrightarrow x+y=1, \text{ khi đó ta có } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x, y \text{ là hai nghiệm của phương trình } u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ u = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là:  $(x; y) = (-1; 2), (2; -1)$ .

**Câu 3 (1,0 điểm):**

Tìm tất cả giá trị nguyên của  $n$  để  $n^2 + 2026$  là một số chính phương.

**Giải:**

$$\text{Đặt } n^2 + 2026 = m^2 \left( m \in \mathbb{N}^*, m \geq 46 \right) \Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 2026 = 2 \cdot 1013 \quad (*)$$

Vì  $m-n, m+n$  cùng tính chẵn lẻ  $\Rightarrow$  không có cặp số  $m, n$  thỏa phương trình  $(*)$

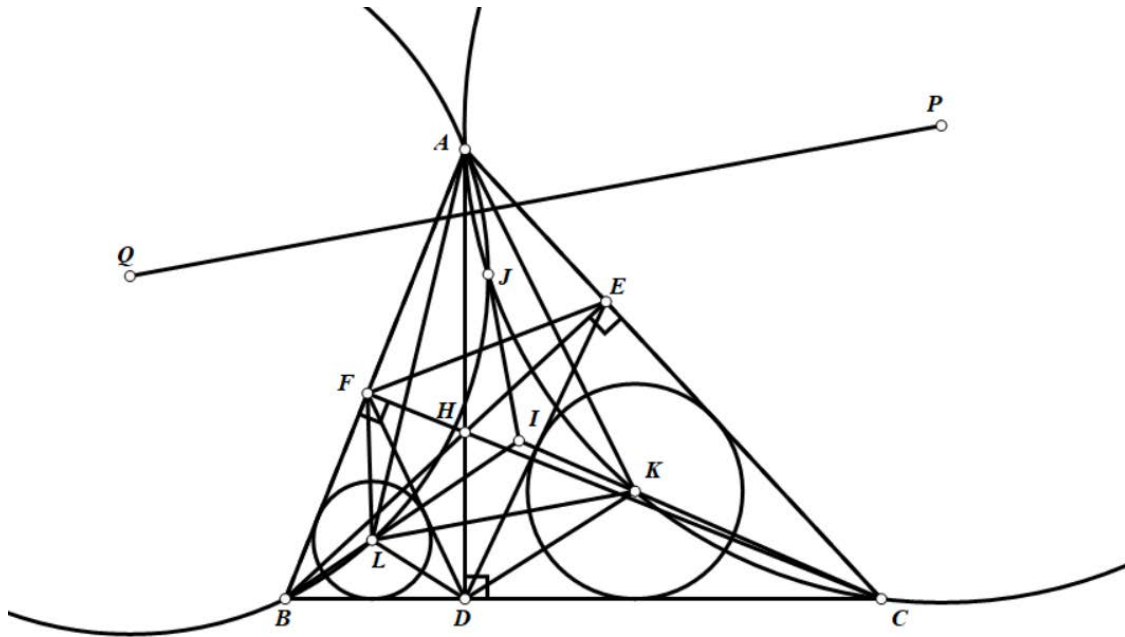
Vậy không có giá trị nguyên của  $n$  thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 4 (3 điểm):**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  có các đường cao  $AD, BE, CF$ . Gọi  $K, L$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác  $CDE, BDF$ .

1. Chứng minh  $\widehat{LDF} = \widehat{KDC}$ .
2. Chứng minh hai tam giác  $LDF$  và  $KDC$  đồng dạng, hai tam giác  $LDK$  và  $FDC$  đồng dạng.
3. Chứng minh tứ giác  $BLKC$  nội tiếp.
4. Gọi  $P, Q$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $AKC, ALB$ , chứng minh  $PQ$  song song với  $KL$ .

**Giải:**



1. Gọi  $H$  là trực tâm của  $\triangle ABC$ .

Vì  $K, L$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác  $CDE, BDF \Rightarrow DL$  là tia phân giác của  $\widehat{FDB}$ ;  $FL$  là tia phân giác của  $\widehat{BFD}$ ;  $CK$  là tia phân giác của  $\widehat{ECD}$ ;  $DK$  là tia phân giác của  $\widehat{EDC}$ .

Vì tứ giác  $DHEC$  có:  $\widehat{HDC} + \widehat{HEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Suy ra tứ giác  $DHEC$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{EHC} \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{FHB}$

Vì tứ giác  $DFHB$  có:  $\widehat{FDB} + \widehat{FHB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Suy ra tứ giác  $DHFB$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{FDB} = \widehat{FHB}$ .

Do đó:  $\widehat{EDC} = \widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{LDF} = \widehat{KDC}$ .

2. Tứ giác  $ACDF$  có:  $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $ACDF$  nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{LFD} = \widehat{KCD}$

Xét  $\triangle LDK$  và  $\triangle KDC$ , ta có:  $\widehat{LDF} = \widehat{KDC}$  và  $\widehat{LFD} = \widehat{KCD} \Rightarrow \triangle LDF \sim \triangle KDC$  (g.g).

$$\triangle LDF \sim \triangle KDC \Rightarrow \frac{LD}{KD} = \frac{DF}{DC} \Rightarrow \frac{LD}{DF} = \frac{KD}{DC} \quad (1)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \widehat{EDC} = \widehat{FDB} \Rightarrow \widehat{LDB} = \widehat{KDC} \Rightarrow \widehat{LDK} + 2\widehat{LDB} = 180^\circ \\ \widehat{FDC} + \widehat{FDB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{FDC} + 2\widehat{LDB} = 180^\circ \end{cases}$$

Nên  $\widehat{LDK} = \widehat{FDC}$  (2)

Từ (1) và (2), suy ra:  $\triangle LDK \sim \triangle FDC$  (c.g.c).

3. Vì  $\widehat{LFD} = \widehat{KCD}$  và  $\widehat{DFC} = \widehat{DLK} \Rightarrow \widehat{DLK} + \widehat{KCD} = \widehat{DFC} + \widehat{LFD} = \widehat{LFC} = 90^\circ - \widehat{BFL}$ .

Vì  $L$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle BDF$  nên  $\widehat{BLD} = 90^\circ + \widehat{BFL}$ .

Khi đó  $\widehat{BLK} + \widehat{KCD} = \widehat{BLD} + \widehat{DLK} + \widehat{KCD} = 90^\circ + \widehat{BFL} + 90^\circ - \widehat{BFL} = 180^\circ$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $BCKL$  nội tiếp.

4. Gọi  $J, I$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của  $\triangle AEF$  và  $\triangle ABC \Rightarrow J \in AI$ .

Tương tự ý 1, 2, 3 ta suy ra các tứ giác  $ABLJ, ACKJ$  nội tiếp

$\Rightarrow J$  là giao điểm thứ hai của hai đường tròn  $(P)$  và  $(Q)$

$\Rightarrow PQ \perp AJ \Rightarrow PQ \perp AI$  (3)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \widehat{LIK} = 90^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{2} \Leftrightarrow \widehat{LIK} = 90^\circ + \widehat{IAK} + \widehat{KAC} \Leftrightarrow \widehat{IAK} = \widehat{LIK} - \widehat{KAC} - 90^\circ \\ \widehat{LKA} = \widehat{LKI} + \widehat{IKA} = \widehat{LKI} + \widehat{KAC} + \widehat{KCA} = \widehat{LKI} + \widehat{KAC} + \widehat{KCB} = \widehat{LKI} + \widehat{KAC} + \widehat{ILK} \end{cases}$$

Do đó  $\widehat{IAK} + \widehat{LKA} = \widehat{LIK} + \widehat{LKI} + \widehat{ILK} - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow AI \perp LK$  (4)

Từ (3) và (4) suy ra  $PQ \parallel LK$ .

**Câu 5 (1,0 điểm):**

Một học sinh viết lên bảng một dãy gồm 2023 số nguyên dương sao cho trong dãy này có đúng 10 số hạng phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại những số hạng liên tiếp của dãy này có tích của chúng là một số chính phương.

**Giải:**

Gọi  $a_m$  ( $m = \overline{1, 2023}$ ) là các số hạng của dãy

Các giá trị phân biệt có thể nhận của  $a_i$  là  $x_i$  ( $i = \overline{1, 10}$ ) với  $x_i \in \mathbb{Z}^+$  và  $x_1 < x_2 < \dots < x_{10}$ .

Gọi  $S_j = a_1 \cdot a_2 \cdots a_j$  ( $j = \overline{1, 2023}$ ) là tích của  $j$  số hạng đầu tiên của dãy.

Khi đó  $S_j = x_1^{n_{1j}} \cdot x_2^{n_{2j}} \cdots x_{10}^{n_{10j}}$  với  $n_{1j}; n_{2j}; \dots; n_{10j}$  lần lượt là số lần xuất hiện của các giá trị  $x_j$  trong  $j$  số hạng đầu tiên của dãy đã cho.

Xét 2023 bộ  $(n_{1j}; n_{2j}; \dots; n_{10j})$  ( $j = \overline{1, 2023}$ ) theo module 2, có tất cả  $2^{10} = 1024$  trường hợp có dạng như sau

$$(0; 0; \dots; 0), (0; \dots; 0; 1), (0; \dots; 1; 0), (1; \dots; 1; 1)$$

Do đó tồn tại hai chỉ số  $p, q$  (với  $1 \leq p < q < 2023$ ) thỏa

$$(n_{1p}; n_{2p}; \dots; n_{10p}) \equiv (n_{1q}; n_{2q}; \dots; n_{10q}) \pmod{2}.$$

Do đó:

$$n_{1q} - n_{1p} = 2b_1$$

$$n_{2q} - n_{2p} = 2b_2$$

$$\dots$$

$$n_{10q} - n_{10p} = 2b_{10}$$

Suy ra  $\frac{S_q}{S_p} = a_{p+1} \cdot a_{p+2} \cdots a_q = (x_1^{b_1} \cdot x_2^{b_2} \cdots x_{10}^{b_{10}})^2$ . Điều phải chứng minh.