

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1. (2,5 điểm)

1. Cho biểu thức $P = x^{2022}\sqrt{x} - 5x^{2020}\sqrt{x} + x^2 + 2017$. Tính giá trị của P khi $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$
2. Cho phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ trong đó b, c là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}$. Tìm b, c và các nghiệm còn lại của phương trình

Bài 2. (2,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y - 2 = 0 \end{cases}$$
2. Cho a, b, c là các số nguyên. Đặt $S = (a+2021)^5 + (2b-2022)^5 + (3c+2023)^5$;
 $P = a+2b+3c+2022$. Chứng minh rằng S chia hết cho 30 khi và chỉ khi P chia hết cho 30

Bài 3. (1 điểm) Có tất cả bao nhiêu đa thức $P(x)$ có bậc không lớn hơn 2 với các hệ số nguyên không âm và thỏa mãn điều kiện $P(3)=100$

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm BC

- a) Chứng minh tứ giác $DMEF$ là tứ giác nội tiếp
- b) Đường tròn tâm I đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là P. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) . Chứng minh bốn điểm P, H, M, K thẳng hàng
- c) Các tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (I) cắt nhau ở N. Chứng minh ba đường thẳng MN, EF, AH đồng quy

Bài 5. (1 điểm) Cho hai số x, y thỏa mãn $\begin{cases} x+y \leq 2 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2 - xy$

ĐÁP ÁN

Bài 1. (2,5 điểm)

3. Cho biểu thức $P = x^{2022} \sqrt{x} - 5x^{2020} \sqrt{x} + x^2 + 2017$. Tính giá trị của P khi

$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

$$P = \sqrt{x} \cdot x^{2020} (x^2 - 5) + x^2 + 2017$$

$$\text{Ta có : } x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

$$2x = 2\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{8(2+\sqrt{5})} - \sqrt[3]{8(2-\sqrt{5})}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{(\sqrt{5}+1)^3} + \sqrt[3]{(\sqrt{5}-1)^3} = 2\sqrt{5} \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

$$\text{Với } x = \sqrt{5} \Rightarrow P = \sqrt{\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5})^{2020} (5-5) + 5 + 2017 = 2022$$

4. Cho phương trình $x^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ trong đó b, c là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_0 = 2 + \sqrt{5}$. Tìm b, c và các nghiệm còn lại của phương trình

$x_0 = 2 + \sqrt{5}$ là nghiệm nên :

$$(2 + \sqrt{5})^3 + b(2 + \sqrt{5})^2 + c(2 + \sqrt{5}) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (39 + 9b + 2c) + (17 + 4b + c)\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 39 + 9b + 2c = 0 \\ 17 + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow (39 + 9b + 2c) + (12 + 4b + c)\sqrt{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ x = 2 - \sqrt{5} \\ x = 1 \end{cases}$$

Bài 2. (2,5 điểm)

$$3. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+y) + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ y(x+y)^2 - 2x^2 - 7y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 8y + 2 = 0 \\ y(x^2 + 2xy + y^2) - 2x^2 - 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế, ta được

$$y(x^2 + 2xy + y^2) + 2xy + 2y^2 - 15y = 0$$

$$\Leftrightarrow y[(x+y+1)^2 - 16] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow x^2+1=0(VN) \\ x+y-3=0 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=-2 \Rightarrow y=5 \end{cases} \\ x+y+5=0 \Rightarrow x^2+9x+46=0(VN) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x, y) = \{(1; 2); (-2; 5)\}$

4. Cho a, b, c là các số nguyên. Đặt $S = (a+2021)^5 + (2b-2022)^5 + (3c+2023)^5$;

$P = a + 2b + 3c + 2022$. Chứng minh rằng S chia hết cho 30 khi và chỉ khi P chia hết cho 30

$$P = a + 2b + 3c + 2022 = (a + 2021) + (2b - 2022) + (3c + 2023)$$

$$S - P = [(a + 2021)^5 - (a + 2021)] + [(2b - 2022)^5 - (2b - 2022)] + [(3c + 2023)^5 - (3c + 2023)]$$

Với $n \in \mathbb{Z}$ thì $n^5 - n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5n(n-1)(n+1)$

Suy ra $(n^5 - n) : 5$ và $(n^5 - n) : 2$; $(n^5 - n) : 3$

Do đó $(n^5 - n) : 30$, từ đó $(S - P) : 30$. Do $P : 30 \Rightarrow S : 30$

Bài 3. (1 điểm) Có tất cả bao nhiêu đa thức $P(x)$ có bậc không lớn hơn 2 với các hệ số nguyên không âm và thỏa mãn điều kiện $P(3) = 100$

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P(3) = 9a + 3b + c = 100 \quad (1)$$

$9a : 3, 3b : 3, 100$ chia cho 3 dư 1 nên c chia cho 3 dư 1

Suy ra $c = 3k + 1 (k \in \mathbb{Z})$, (1) trở thành :

$$9a + 3b + 3k + 1 = 100 \Leftrightarrow 3a + b + k = 33 \quad (2)$$

Từ (2) suy ra $a \leq 11$

$a = 0$ thì $b + k = 33$ có 34 bộ (a, b, k)

$a = 1 \Rightarrow b + k = 30$ có 31 bộ (a, b, k)

$a = 2 \Rightarrow b + k = 27$ có 28 bộ (a, b, k)

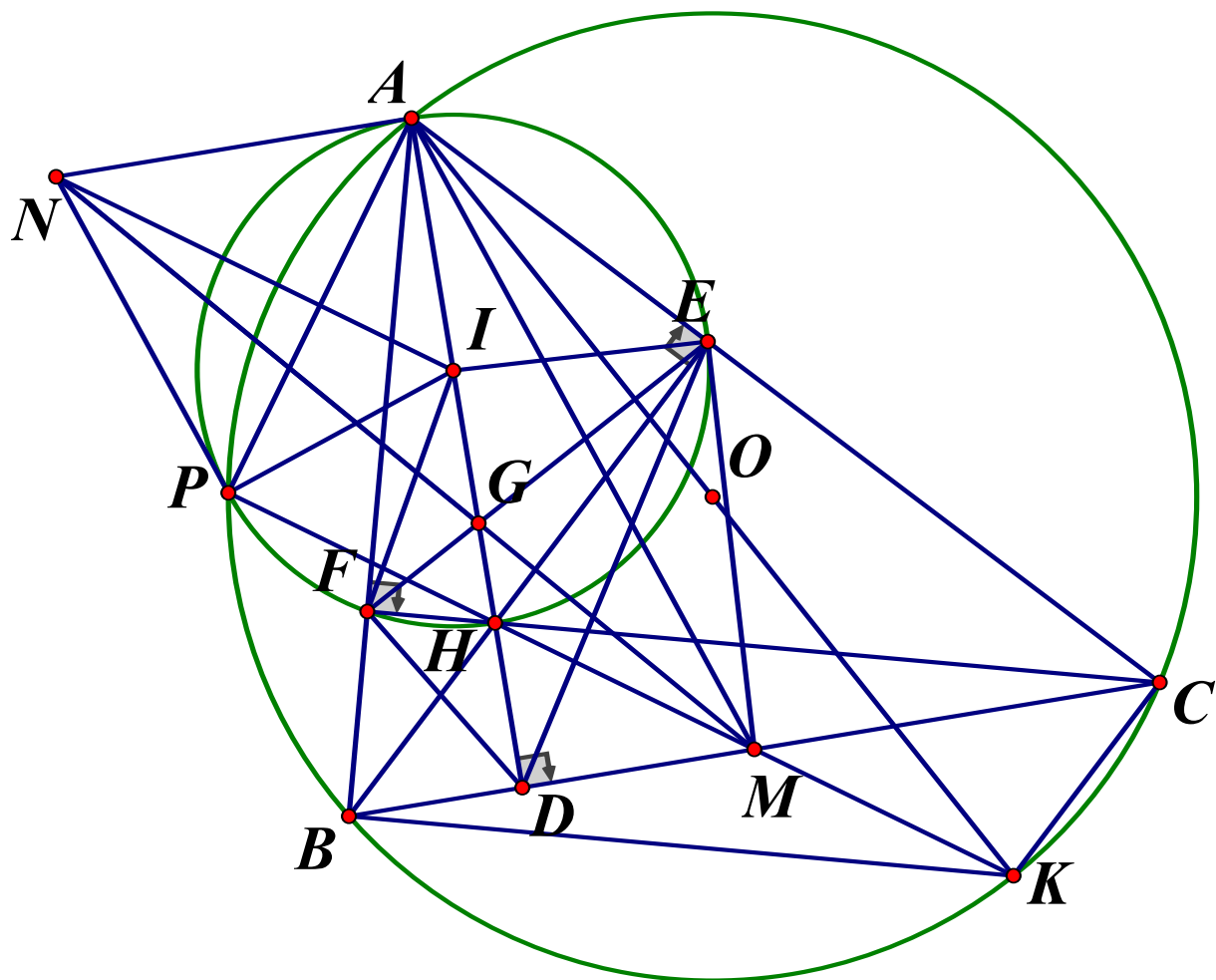
.....

$a = 11 \Rightarrow b + k = 0$ có 1 bộ (a, b, k)

Vậy số bộ (a, b, k) là 210

Bài 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm BC



d) Chứng minh tứ giác $DMEF$ là tứ giác nội tiếp

Ta có tứ giác $BCEF$ nội tiếp có tâm là trung điểm M của BC

Khi đó ta có : $\angle EMF = 2\angle EBF$

Lại có các tứ giác $BDHF, DCEH$ nội tiếp ta có :

$\angle HDF = \angle FBH, \angle HDE = \angle ECH \Rightarrow \angle EDF = \angle FBH + \angle ECH = 2\angle EBF$ (do $BCEF$ là tứ giác nội tiếp). Do đó $\angle EMF = \angle EDF$

Suy ra tứ giác $DMEF$ nội tiếp

e) Đường tròn tâm I đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là

P. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) . Chứng minh bốn điểm

P, H, M, K thẳng hàng

Do AK là đường kính của (O) nên $KB \perp AB, KC \perp AC$

Ta cũng có $HB \perp AC, HC \perp AB$ nên ta được : $KB // HC, KC // HB$

Do tứ giác $KCHB$ là hình bình hành nên 3 điểm H, K và trung điểm M của BC thẳng hàng (1)

Do P là giao điểm của 2 đường tròn $(O), (I)$ nên $\angle APH = \angle APK = 90^\circ$

Do đó P, H, K thẳng hàng (2)

Từ (1), (2) suy ra 4 điểm P, H, M, K thẳng hàng

f) Các tiếp tuyến tại A và P của đường tròn (I) cắt nhau ở N . Chứng minh ba đường thẳng MN, EF, AH đồng quy

Gọi G là giao điểm của EF và AH

Ta có $\angle AIN = \angle AHP = \angle DHM$

Do đó $\triangle AIN \sim \triangle DHM$ ($\angle AIN = \angle DHM, \angle IAN = \angle HDM = 90^\circ$)

Suy ra $\frac{AN}{DM} = \frac{AI}{DH} (*)$

Ta có : $\angle EIF = 2\angle BAC = 2\angle BHF$. Do đó $\angle EIF + \angle EDF = 2(\angle FBH + \angle FHB) = 180^\circ$

Suy ra tứ giác $EIFD$ nội tiếp. Khi đó ta được : $GI.GD = GF.GE$

Lại có tứ giác $AEHF$ nội tiếp nên $GF.GE = GH.GA$

Suy ra $GI.GD = GA.GH \Rightarrow \frac{GI}{GA} = \frac{GH}{GD} \Rightarrow \frac{IA}{GA} = \frac{HD}{GD} \Rightarrow \frac{IA}{HD} = \frac{GA}{GD} (**)$

Từ (*) và (**) thì ta có $\frac{AM}{DM} = \frac{GA}{GD}$. Mà ta có $AN // DM$ nên 3 điểm N, G, M thẳng hàng.

Vậy 3 đường thẳng MN, EF, AH đồng quy tại điểm G

Bài 5. (1 điểm) Cho hai số x, y thỏa mãn $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 3 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^2 + y^2 - xy$

Ta có :

$$x^2 + y^2 + xy = 3 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 3 + xy \Rightarrow (x+y)^2 \leq 3 + \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow (x+y)^2 \leq 4 \quad (1)$$

$$9 - T = 3(x^2 + y^2 + xy) - (x^2 + y^2 - xy) = 2(x+y)^2 \quad (2)$$

$$(1) \& (2) \Rightarrow 0 \leq 9 - T \leq 8 \Rightarrow 1 \leq T \leq 9$$

$$\Rightarrow \text{Max } T = 9. \text{ Dấu = xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}; y=-\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3}; y=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Min } T = 1. \text{ Dấu = xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x^2+y^2+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ (2-y)^2+y^2+(2-y).y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$