

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (4,0 điểm)

- 1) Tìm số tự nhiên n sao cho số $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương.
- 2) Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $6x + 5y + 18 = 2xy$.
- 3) Chứng minh với mọi số nguyên chẵn m thì $m^3 + 20m$ chia hết cho 48.

Bài 2. (4,0 điểm)

- 1) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-3}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm các giá trị của x để A có giá trị nguyên.

- 2) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

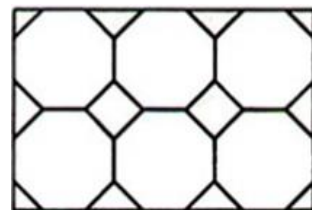
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

Bài 3. (4,0 điểm)

- 1) Giải phương trình: $x^2 - 3 = 2\sqrt{2x+3}$
- 2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + 2y = 14 \\ x^3 + 6x^2 + 12x - y = -7 \end{cases}$$

Bài 4. (7,0 điểm)

- 1) (2,0 điểm) Một sân vườn hình chữ nhật được lát bởi các viên gạch hình bát giác đều và các viên gạch hình vuông hoặc hình tam giác vuông cân (hình vẽ minh họa). Biết cạnh bát giác đều bằng $2dm$ và số gạch hình bát giác đều là 500 viên. Tính diện tích phần sân vườn được lát bởi những viên gạch không phải là hình bát giác đều.



- 2) (5,0 điểm) Cho đường tròn (O, R) và dây $BC = R\sqrt{2}$ cố định, điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Tia BD, CE lần lượt cắt đường tròn (O, R) tại M, N . Hai đường thẳng NB và MC cắt nhau tại P .

- a) Tính số đo cung BC và số đo góc ACM .
- b) Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng và $PH = MN$.
- c) Chứng minh đường thẳng PH luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = a$. Gọi M là một điểm di động trên đường chéo AC (M khác A và C). Kẻ ME vuông góc với AB ($E \in AB$) và MF vuông góc với BC ($F \in BC$). Tính diện tích nhỏ nhất của tam giác DEF theo a .

---HẾT---

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút

(Hướng dẫn chấm có 6 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1. (4,0 điểm)

- 1) Tìm số tự nhiên n sao cho số $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương.
- 2) Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $6x + 5y + 18 = 2xy$.
- 3) Chứng minh với mọi số nguyên chẵn m thì $m^3 + 20m$ chia hết cho 48.

Bài	Tóm tắt cách giải	Điểm
1.1 (1,5 điểm)	Vì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương nên đặt $n^2 + 2n + 12 = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2 \Leftrightarrow k^2 - (n + 1)^2 = 11$ $\Leftrightarrow (k + n + 1)(k - n - 1) = 11$ Ta có $k + n + 1 > k - n - 1$ và chúng là những số nguyên dương, nên ta có $(k + n + 1)(k - n - 1) = 11.1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} k + n + 1 = 11 \\ k - n - 1 = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} k = 6 \\ n = 4 \end{cases}$ Vậy số tự nhiên cần tìm là $n = 4$.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
1.2 (1,5 điểm)	Ta có $6x + 5y + 18 = 2xy \Leftrightarrow 2xy - 6x - 5y = 18$ $\Leftrightarrow 2xy - 6x + 15 - 5y = 33 \Leftrightarrow 2x(y - 3) - 5(y - 3) = 33$ $\Leftrightarrow (y - 3)(2x - 5) = 33$ x, y nguyên dương nên $y - 3 \geq -2; 2x - 5 \geq -3$, do đó chỉ có các trường hợp sau: TH1: $\begin{cases} y - 3 = 1 \\ 2x - 5 = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 19 \\ y = 4 \end{cases}$ TH2: $\begin{cases} y - 3 = 33 \\ 2x - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 36 \end{cases}$ TH3: $\begin{cases} y - 3 = 11 \\ 2x - 5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 14 \end{cases}$ TH4: $\begin{cases} y - 3 = 3 \\ 2x - 5 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 6 \end{cases}$ Các cặp số nguyên dương đều thỏa mãn đẳng thức trên Vậy các cặp số cần tìm $(3; 36), (4; 14), (8; 6), (19; 4)$.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
1.3 (1,0 điểm)	Vì m chẵn nên $m = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow m^3 + 20m = (2k)^3 + 40k$ $= 8k^3 + 40k = 8(k^3 + 5k) = 8[(k^3 - k) + 6k] = 8(k^3 - k) + 48k$ Ta có $k^3 - k = k(k - 1)(k + 1) : 6 \Rightarrow 8(k^3 - k) : 48;$ mà $48k : 48$ Vậy $m^3 + 20m$ chia hết cho 48.	0,25 0,25 0,25 0,25

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-3}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm các giá trị của x để A có giá trị nguyên.

2) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$

Bài 2	Tóm tắt cách giải	Điểm
2.1 (2,5 điểm)	* Với điều kiện $x \geq 0; x \neq 1$ $A = \left(\frac{x+3\sqrt{x}-3-(x-\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,5
	$= \frac{4\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$	0,5
	$= \frac{4(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{4}{\sqrt{x}+1}$	0,5
	* Với điều kiện $x \geq 0; x \neq 1$, ta có $0 < \frac{4}{\sqrt{x}+1} \leq 4$	0,25
	Mà A nhận giá trị nguyên nên $A \in \{1; 2; 3; 4\}$ Nếu A = 1 thì x = 9 (nhận); Nếu A = 2 thì x = 1 (loại);	0,25
	Nếu A = 3 thì x = $\frac{1}{9}$ (nhận); Nếu A = 4 thì x = 0 (nhận); Vậy $x \in \left\{ 0; \frac{1}{9}; 9 \right\}$.	0,25
2.2 (1,5 điểm)	Theo bất đẳng thức Cauchy Ta có: $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z} \cdot \frac{y+z}{4}} = 2 \cdot \frac{x}{2} = x$	0,5
	$\frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{x+z} \cdot \frac{x+z}{4}} = 2 \cdot \frac{y}{2} = y$	
	$\frac{z^2}{y+x} + \frac{y+x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z^2}{y+x} \cdot \frac{y+x}{4}} = 2 \cdot \frac{z}{2} = z$	
	Cộng từng vế các bất trên: $P + \frac{y+z}{4} + \frac{x+z}{4} + \frac{y+x}{4} \geq x+y+z$	
	Suy ra $P \geq \frac{x+y+z}{2}$.	0,25
	Theo bất đẳng thức Cauchy	

	$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}; \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}; \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx}$ nên $x+y+z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$ hay $P \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2} = \frac{1}{2}$ Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} \frac{x^2}{y+z} = \frac{z+y}{4}; \frac{z^2}{y+x} = \frac{x+y}{4}; \frac{y^2}{z+x} = \frac{x+z}{4} \\ x=y=z; \sqrt{xy} = \sqrt{yz} = \sqrt{zx} = 1 \end{cases}$ $\text{Min}P = \frac{1}{2}$ khi $x=y=z = \frac{1}{3}$.	0,25 0,25 0,25
--	---	-------------------------------------

Bài 3. (4,0 điểm)

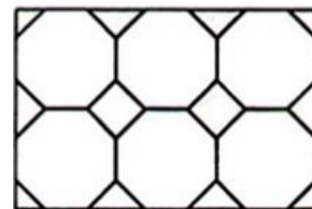
1) Giải phương trình : $x^2 - 3 = 2\sqrt{2x+3}$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + x + 2y = 14 \\ x^3 + 6x^2 + 12x - y = -7 \end{cases}$$

Bài 3	Tóm tắt cách giải	Điểm
3.1 (2,0 điểm)	ĐK: $x \geq -\frac{3}{2}$	0,25
	$x^2 - 3 = 2\sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x + 3 + 2\sqrt{2x+3} + 1$	0,25
	$\Leftrightarrow (x+1)^2 = (\sqrt{2x+3} + 1)^2$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{2x+3} + 1 \\ x+1 = -(\sqrt{2x+3} + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2x+3} \quad (1) \\ x+2 = -\sqrt{2x+3} \quad (2) \end{cases}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$	0,5
	(2) vô nghiệm, vì với ĐK $x \geq -\frac{3}{2}$ thì $VT > 0; VP \leq 0$	0,5
	Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{3\}$.	0,25
3.2 (2,0 điểm)	$\begin{cases} xy + x + 2y = 14 \\ x^3 + 6x^2 + 12x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+2) + 2 + x = 16 \\ x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = y + 1 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(y+1) = 16 \quad (1) \\ (x+2)^3 = y+1 \quad (2) \end{cases}$	0,5
	Thế (2) vào (1) được	
	$(x+2)^4 = 16 \Leftrightarrow x+2 = \pm 2$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=7 \\ x=-4 \Rightarrow y=-9 \end{cases}$	0,5
	Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(0;7); (-4;-9)$.	0,25

Bài 4. (7,0 điểm)

1) (2,0 điểm) Một sân vườn hình chữ nhật được lát bởi các viên gạch hình bát giác đều và các viên gạch hình vuông hoặc hình tam giác vuông cân (hình vẽ minh họa). Biết cạnh bát giác đều bằng 2 dm và số gạch hình bát giác đều là 500 viên. Tính diện tích phần sân vườn được lát bởi những viên gạch không phải là hình bát giác đều.



2) (5,0 điểm) Cho đường tròn (O, R) và dây $BC = R\sqrt{2}$ cố định, điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Tia BD, CE lần lượt cắt đường tròn (O, R) tại M, N . Hai đường thẳng NB và MC cắt nhau tại P .

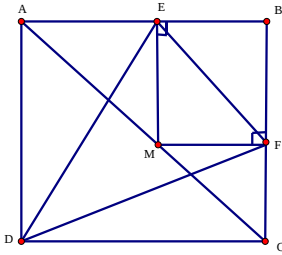
- Tính số đo cung BC và số đo góc ACM .
- Chứng minh ba điểm M, O, N thẳng hàng và $PH = MN$.
- Chứng minh đường thẳng PH luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4	Tóm tắt cách giải	Điểm
4.1 (2,0 điểm)	Xét một hình vuông chứa viên gạch hình bát giác đều cạnh 2 dm . Bốn tam giác vuông cân nằm ngoài viên gạch hình bát giác đều ghép lại được một hình vuông cạnh 2 dm có diện tích bằng 4 dm^2 . Như vậy ứng với mỗi viên gạch hình bát giác đều, có diện tích 4 dm^2 được lát bởi các viên gạch không phải là hình bát giác đều. Vậy diện tích phải tìm là $500 \times 4 = 2000 (\text{dm}^2) = 20 (\text{m}^2)$.	0,5
		0,5
		0,5
		0,5
4.2 (5,0 điểm)	Hình vẽ đúng 	0,5

	a) (1,5 điểm) * Có $BC^2 = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2 = OB^2 + OC^2 \Rightarrow \triangle OBC$ vuông cân tại O (theo ĐL Pitago đảo). Do đó $BOC = 90^\circ$ (góc ở tâm chắn cung BC) $\Rightarrow$ số $BC = 90^\circ$ * $BMC = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$ (chắn cung BC) Mà $\triangle DMC$ vuông tại $D \Rightarrow ACM = 45^\circ$	0,25 0,25 0,25 0,5 0,25
	b) (1,5 điểm) * $BAC = ACM = 45^\circ \Rightarrow AB \parallel CM$ Mà $AB \perp CN$ Nên $CM \perp CN \Rightarrow MN$ là đường kính của đường tròn (O) hay ba điểm M, O, N thẳng hàng. * $\triangle CMH$ vuông có $CMH = 45^\circ$ nên $\triangle CMH$ vuông cân tại $C \Rightarrow CM = CH$ (1) * $MBN = MCN = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên H là trực tâm của $\triangle PMN \Rightarrow PH \perp MN$ tại L * $CMN = CHP$ (cùng phụ CPH) (2) * Có $NCM = PCH = 90^\circ$ (3) Từ (1), (2), (3) Suy ra $\triangle MCN = \triangle HCP \Rightarrow MN = PH$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	c) (1,5 điểm) Gọi I là trung điểm của PH. Ta C/m I là điểm cố định. * Có BI là trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông PHB nên $IP = IH = IB \Rightarrow \triangle IBH$ cân tại I $\Rightarrow IBH = IHB$ (4) * Có $IHB = MHL$ (5) (đối đỉnh) * Có $OM = OB \Rightarrow \triangle OMB$ cân tại $O \Rightarrow OBM = OMB$ (6) * Có $MHL + OMB = 90^\circ$ (7) (do $PH \perp MN$ tại L) Từ (4), (5), (6), (7) $\Rightarrow IBH + OBM = 90^\circ \Rightarrow BI \perp BO$ Suy ra BI là tiếp tuyến của đường tròn (O) * C/m minh tương tự: CI là tiếp tuyến của đường tròn (O). * Vì đường tròn (O) cố định, dây BC cố định nên hai tiếp tuyến BI, CI cố định. Do đó điểm I cố định. Vậy PH đi qua điểm cố định I (ĐPCM)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho hình vuông $ABCD$ có $AB = a$. Gọi M là một điểm di động trên đường chéo AC (M khác A và C). Kẻ ME vuông góc với AB ($E \in AB$) và MF vuông góc với BC ($F \in BC$). Tính diện tích nhỏ nhất của tam giác DEF theo a .

Bài 5	Tóm tắt cách giải	Điểm
Bài 5 (1,0 điểm)		0,25
	Đặt $AE = x, CF = y$ $\Rightarrow MF = CF = BE = y; BF = x$ và $x + y = a$ $S_{DEF} = S_{ABCD} - S_{ADE} - S_{DCF} - S_{BEF}$	
	$= a^2 - \frac{ax}{2} - \frac{ay}{2} - \frac{xy}{2} = a^2 - \frac{a}{2}(x + y) - \frac{xy}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{xy}{2}$	0,25
	Ta có S_{DEF} nhỏ nhất khi xy lớn nhất. $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow \text{Max}(xy) = \frac{a^2}{4}$ khi $x = y = \frac{a}{2}$	0,25
	Lúc đó điểm M là trung điểm của AC . Diện tích nhỏ nhất của tam giác DEF là: $\text{Min } S_{DEF} = \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{8} \text{ (đvdt) khi } M \text{ là trung điểm của } AC.$	0,25

Ghi chú : + Mỗi bài toán có thể có nhiều cách giải, học sinh giải cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa. Tổ chấm thảo luận thống nhất biểu điểm chi tiết cho các tình huống làm bài của học sinh.

+ Điểm từng bài và toàn bài không làm tròn số.