

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Ngày thi: 28/9/2022

(Đáp án gồm 05 trang)

Bài	Nội dung	Điểm
5 (6 điểm)	Với mỗi số nguyên dương m lớn hơn 1, ta kí hiệu $p(m)$ là số các ước nguyên tố phân biệt của m và đặt $f(m)$ là ước nguyên tố nhỏ thứ $\left[\frac{p(m)+1}{2} \right]$ của m . Tìm tất cả các số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức sau $f(n^2+2)+f(n^2+5)=2n-4$.	
	Vì mọi ước nguyên tố đều lớn hơn hoặc bằng 2 nên: $2n-4=f(n^2+2)+f(n^2+5)\geq 2+2\Rightarrow n\geq 4.$ Với $n=4$: $f(18)+f(21)=2+3=5>2\cdot 4-4$ (loại). Với $n=5$: $f(27)+f(30)=3+3=6=2\cdot 5-4$ (thỏa mãn). Với $n=6$: $f(38)+f(41)=2+41=43>2\cdot 6-4$ (loại). Với $n=7$: $f(51)+f(54)=3+2=5<2\cdot 7-4$ (loại).	1,5
	Ta chứng minh bổ đề: Nếu n là một hợp số thì $f(n)\leq \sqrt{n}$ (1) Xét hai trường hợp: TH1: $p(n)=1\Rightarrow n=s^t$ với $t\in\mathbb{N}, t\geq 2, s$ là số nguyên tố. Khi đó $f(n)=s\leq \sqrt{s^t}=\sqrt{n}\Rightarrow (1)$ đúng. TH2: $p(n)\geq 2$. Nếu $f(n)>\sqrt{n}$ thì từ $\left[\frac{p(n)+1}{2} \right]<p(n)$ suy ra ước nguyên tố thứ $p(n)$ của n cũng lớn hơn $\sqrt{n}$, vô lý vì n không thể có hai ước nguyên tố phân biệt cùng lớn hơn $\sqrt{n}$. Như vậy $f(n)\leq \sqrt{n}$. Bổ đề trên được chứng minh.	1,5
	Quay lại bài toán Với $n\geq 8$: Sử dụng bổ đề ta có $f(n^2+2)\leq \sqrt{n^2+2}\Rightarrow f(n^2+2)\leq n$ và $f(n^2+5)\leq \sqrt{n^2+5}\Rightarrow f(n^2+5)\leq n$. Nếu $f(n^2+2)=n$ thì $n n^2+2\Rightarrow n 2\Rightarrow n=2$ (vô lý). Tương tự: Nếu $f(n^2+5)=n$ thì $n n^2+5\Rightarrow n 5\Rightarrow n=5$ (vô lý). Nếu $f(n^2+2)=n-1$ thì $(n-1) n^2+2\Rightarrow (n-1) 3\Rightarrow n\leq 4$ (vô lý). Tương tự nếu $f(n^2+5)=n-1$ thì $(n-1) n^2+5\Rightarrow (n-1) 6\Rightarrow n\leq 7$ (vô lý). Suy ra $f(n^2+5)\leq n-2$ (1).	1,5
	Nếu $f(n^2+2)=n-2$ thì $(n-2) n^2+2\Rightarrow (n-2) 4\Rightarrow n\leq 6$ (vô lý). Do đó $f(n^2+2)\leq n-3$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $f(n^2+2)+f(n^2+5)\leq 2n-5<2n-4$ (loại). Vậy $n=5$ là giá trị duy nhất thỏa mãn đề bài.	1,5

6
(7 điểm)

Cho dãy đa thức $(Q_n(x))$ xác định bởi:

$$Q_1(x) = (x-2)^2, Q_n(x) = (Q_{n-1}(x) - 2)^2, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Khai triển đa thức $(Q_{2022}(x))^{10}$ ta được $(Q_{2022}(x))^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$. Tính a_2 .

Ta có $Q_1(0) = 4, Q_2(0) = 4$, theo quy nạp ta có $Q_k(0) = 4, \forall k \in \mathbb{N}^*$

Trong khai triển của đa thức $Q_k(x)$, ta đặt A_k là hệ số của x , B_k là hệ số của x^2 và kí hiệu $P_k x^3$ là tổng các số hạng chứa các lũy thừa lớn hơn 2 của x .

1,0

$$\text{Khi đó } Q_k(x) = P_k x^3 + B_k x^2 + A_k x + 4 = (Q_{k-1}(x) - 2)^2$$

$$= (P_{k-1} x^3 + B_{k-1} x^2 + A_{k-1} x + 2)^2$$

$$= P_k x^3 + (4B_{k-1} + A_{k-1}^2) x^2 + 4A_{k-1} x + 4$$

1,5

Suy ra $A_k = 4A_{k-1}$ và $B_k = 4B_{k-1} + A_{k-1}^2$.

$$\text{Do } (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$$

Suy ra $B_1 = 1, A_1 = -4$ và $A_k = 4A_{k-1}$. Theo quy nạp ta có $A_k = -4^k$.

$$\text{Ta có } B_k = 4B_{k-1} + A_{k-1}^2$$

$$= A_{k-1}^2 + 4(A_{k-2}^2 + 4B_{k-2})$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2(A_{k-3}^2 + 4B_{k-3})$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + 4^3(A_{k-4}^2 + 4B_{k-4})$$

$$= \dots$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + \dots + 4^{k-2}(A_1^2 + 4B_1)$$

$$= A_{k-1}^2 + 4A_{k-2}^2 + 4^2A_{k-3}^2 + \dots + 4^{k-2}A_1^2 + 4^{k-1}B_1$$

$$= 4^{2k-2} + 4^{2k-3} + 4^{2k-4} + \dots + 4^k + 4^{k-1} = \frac{4^{2k-1} - 4^{k-1}}{3}.$$

2,0

$$\text{Ta có } (Q_k(x))^{10} = (4 + A_k x + B_k x^2 + P_k x^3)^{10}$$

$$= C_{10}^0 (4 + A_k x)^{10} + C_{10}^1 (4 + A_k x)^9 (B_k x^2 + P_k x^3) + \dots$$

$$= C_{10}^0 (C_{10}^0 4^{10} + C_{10}^1 4^9 A_k x + C_{10}^2 4^8 (A_k)^2 x^2 + \dots) + C_{10}^1 (C_9^0 4^9 B_k x^2 + \dots) + \dots$$

1,5

Suy ra hệ số của số hạng chứa x^2 trong khai triển của $(Q_k(x))^{10}$ là

$$= C_{10}^0 C_{10}^2 4^8 (A_k)^2 + C_{10}^1 C_9^0 4^9 B_k = 45 \cdot 4^8 \cdot (-4^k)^2 + 10 \cdot 4^9 \cdot \frac{4^{2k-1} - 4^{k-1}}{3}$$

$$= \frac{145}{3} \cdot 4^{2k+8} - \frac{10}{3} \cdot 4^{k+8}$$

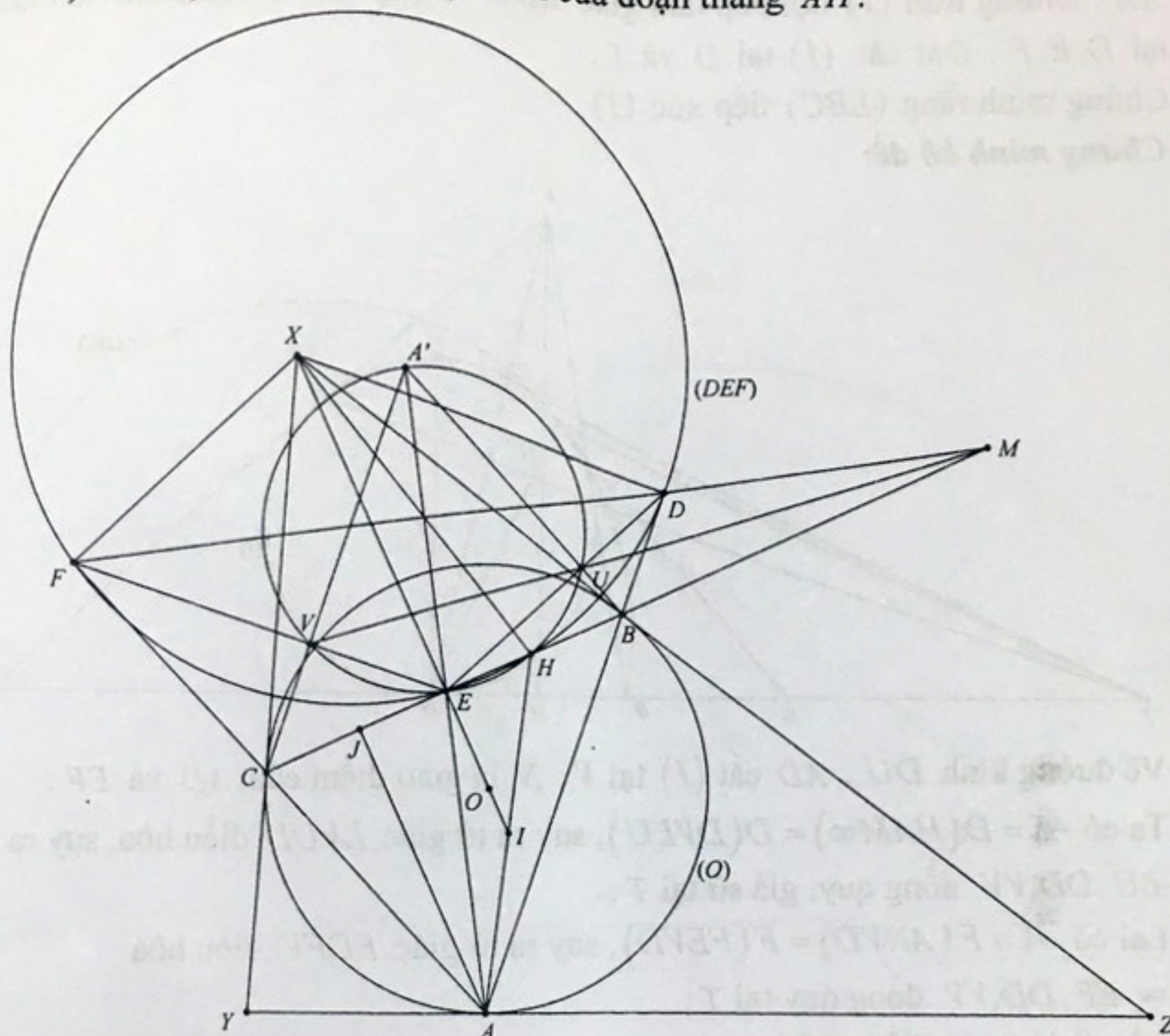
1,0

Áp dụng kết quả trên với $k = 2022$ cho ta có $a_2 = \frac{145}{3} \cdot 4^{4052} - \frac{10}{3} \cdot 4^{2030}$.

7
điểm)

Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác XYZ và tiếp xúc với các cạnh YZ, ZX, XY lần lượt tại các điểm A, B, C . Các điểm D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của X lên các đường thẳng AB, BC, CA . Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt BC tại E và H . Đường thẳng XE cắt AH tại I .

a) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng AH .



Hạ AJ vuông góc BC , H' đối xứng J qua E .

Ta chứng minh H' thuộc (DEF) (Tức là H' trùng với H).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua E . Ta thấy tứ giác $ECFX$ nội tiếp.

Có $\widehat{CEF} + \widehat{ABC} = \widehat{CXF} + \widehat{XCF} = 90^\circ$

nên $EF \perp AB \Rightarrow A'C \perp EF$ tại V .

Tương tự $DE \perp AC \Rightarrow A'B \perp DE$ tại U .

Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác BUD và CVF ta được BC, UV và DF đồng quy, giả sử tại M .

Đề ý $\widehat{EUA'} = \widehat{EH'A'} = \widehat{EVA'} = 90^\circ$

nên E, H', V, U, A' cùng thuộc một đường tròn, suy ra:

$$MH'.ME = MV.MU \quad (1)$$

Lại có E là trực tâm $\triangle ADF$ nên $\widehat{EVU} = \widehat{EA'U} = \widehat{EDF}$ (phụ với $\widehat{DEA'}$)

Suy ra tứ giác $UVFD$ nội tiếp $MV.MU = MF.MD$ (2).

Từ (1), (2) ta suy ra H' thuộc (DEF) .

Suy ra $H' \equiv H \Rightarrow E$ là trung điểm JH , mà $OE \parallel AJ$ nên OE đi qua trung điểm AH .

1,0

1,0

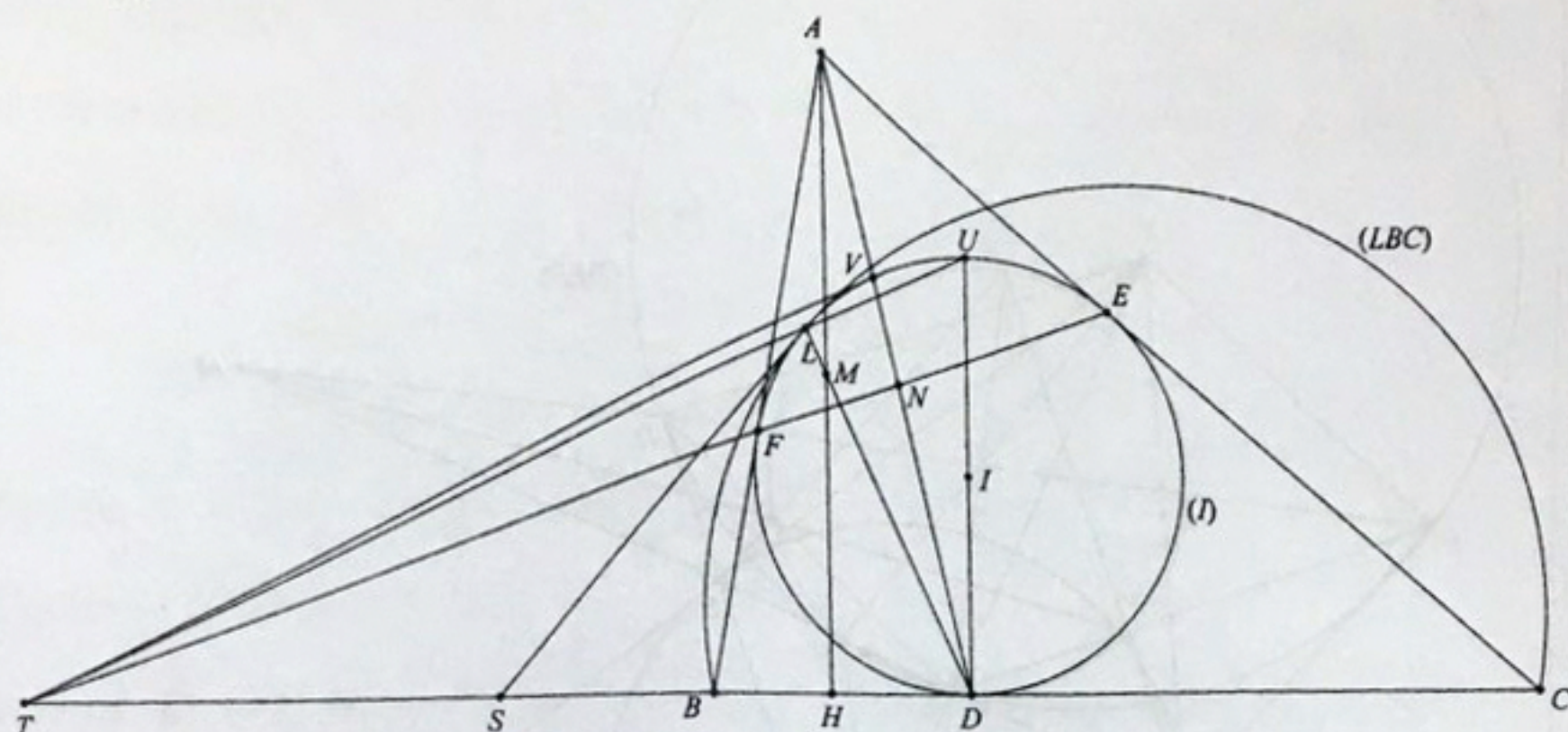
1,0

b) Đường thẳng AH cắt đường tròn (O) tại A và T . Đường thẳng qua T song song với BC cắt đường tròn (O) tại T và S . Chứng minh rằng đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác YZS .

Bổ đề: Cho tam giác ABC có đường cao AH , $H \in BC$, M là trung điểm AH . Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F ; DM cắt (I) tại D và L .

Chứng minh rằng (LBC) tiếp xúc (I) .

Chứng minh bổ đề:



2,0

Vẽ đường kính DU , AD cắt (I) tại V , N là giao điểm của AD và EF .

Ta có $-1 = D(HAM\infty) = D(DVLU)$, suy ra tứ giác $LVUD$ điều hòa, suy ra LU, DD, VV đồng quy, giả sử tại T .

Lại có $-1 = F(ANVD) = F(FEVD)$, suy ra tứ giác $EDFV$ điều hòa $\Rightarrow EF, DD, VV$ đồng quy tại T .

Lấy S là trung điểm TD .

Có $\widehat{ULD} = \widehat{TL D} = 90^\circ$ nên $SL = SD = ST$.

Suy ra SL là tiếp tuyến của (I) (1)

Vì $(TNFE) = -1$ nên theo phép chiếu xuyên tâm A ta có $(TDBC) = -1$,

do đó $ST^2 = SB \cdot SC$ (hệ thức Newton) $\Rightarrow SL^2 = SB \cdot SC$

Suy ra SL là tiếp tuyến của (LBC) (2)

Từ (1) và (2) suy ra (I) tiếp xúc với (LBC) tại L và bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán:

Theo bổ đề trên ta chỉ cần chứng minh AS chia đôi XQ , với Q thuộc YZ sao cho XQ vuông góc YZ .

Ta có $AE \perp DF$ tại K , vì tứ giác $ADXF$ nội tiếp nên

$\widehat{KFA} = \widehat{DXA} \Rightarrow \widehat{DXA} = \widehat{KAF}$, mà $ST \parallel BC \Rightarrow \widehat{BAS} = \widehat{TAC} \Rightarrow \widehat{SAX} = \widehat{EAT}$

Từ đó $\frac{\sin \widehat{SAX}}{\sin \widehat{SAQ}} = \frac{\sin \widehat{EAT}}{\sin \widehat{STA}} = \frac{\sin \widehat{EAT}}{\sin \widehat{EHA}} = \frac{EH}{EA}$ (3)

Theo phần a) ta được EO chia đôi AH , nên theo Định lý sin ta có

1,0