

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM NGÀY 2

Bài 5. (10,0 điểm) a) Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 5 a). (5 điểm)	Thế $x = y = 0$ vào (1) ta được $f(f(0)) = (f(0))^2$ Thế $x = y$ vào (1) ta được $(f(x))^2 = (f(0))^2 + x^2, \forall x \in \mathbb{R}$ (2)	0,5 điểm 0,5 điểm
	Suy ra $(f(x))^2 = (f(-x))^2 \Rightarrow f(x) = f(-x) , \forall x \in \mathbb{R}.$	0,5 điểm
	Thế $y = 0$ vào (1): $f(f(x)) = f(0)f(x) - f(x) + f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$ (3)	0,5 điểm
	Thế $x = 0, y = -x$ vào (1) ta được $f(f(x)) = f(0)f(-x) + f(-x) - f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$ (4) Từ (3), (4) suy ra $f(0)(f(-x) - f(x)) + f(-x) + f(x) = 2f(0), \forall x \in \mathbb{R}.$ (5)	1,0 điểm
	Giả sử tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = f(-x_0)$ thì thế $x = x_0$ vào (5) ta được $f(x_0) = f(0) \Rightarrow (f(x_0))^2 = (f(0))^2 \Rightarrow (f(0))^2 + x_0^2 = (f(0))^2 + 0^2 \Rightarrow x_0 = 0$ Suy ra mâu thuẫn, suy ra $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$	1,0 điểm
	Từ đây suy ra $f(0) = 0$, nếu tồn tại $x_0 \neq 0$ sao cho $f(x_0) = x_0$ thì từ (4) suy ra $f(f(x_0)) = -f(x_0) = -x_0$ và $f(f(x_0)) = -f(-f(x_0)) = -f(-x_0) = f(x_0) = x_0$ (mâu thuẫn) Vậy từ (2) chứng tỏ $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}.$ Thử lại thấy hàm này thỏa mãn bài toán.	1,0 điểm

Bài 5. (5,0 điểm) b) Tìm số thực dương k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$(a+k)(b+k)(c+k) \geq (k+1)^3$$

đúng với mọi bộ ba số thực không âm (a, b, c) thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3.$

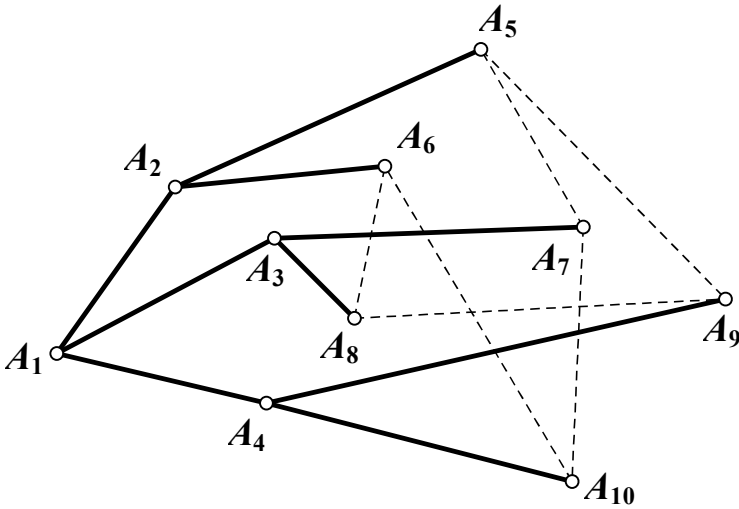
Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 2 (5 điểm)	Bất đẳng thức tương đương với $k^2(a+b+c-3) \geq 1-abc.$ (2) Thay $a=0, b=c=\sqrt{3}$ vào (2) ta được $k^2(2\sqrt{3}-3) \geq 1 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{2\sqrt{3}-3}.$	1,0 điểm
	Với $k = \frac{1}{2\sqrt{3}-3}$ ta cần chứng minh	

	$\frac{1}{2\sqrt{3}-3}(a+b+c-3) \geq 1-abc \Leftrightarrow a+b+c+(2\sqrt{3}-3)abc \geq 2\sqrt{3}$ Đặt $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$. Khi đó $q = 3$ và cần chứng minh $p+(2\sqrt{3}-3)r \geq 2\sqrt{3}$. (3)	1,0 điểm
	TH1: Với $p > 2\sqrt{3}$ thì (3) đúng.	1,0 điểm
	TH2: Với $p \leq 2\sqrt{3}$, dễ thấy $3 \leq p \leq 2\sqrt{3}$ áp dụng bất đẳng thức phụ: $r \geq \frac{4pq-p^3}{9} = \frac{12p-p^3}{9}$	1,0 điểm
	Thay vào (3) ta được: $p+(2\sqrt{3}-3) \cdot \frac{12p-p^3}{9} \geq 2\sqrt{3} \Leftrightarrow (p-3)(p-2\sqrt{3})(p+3+\sqrt{3}) \leq 0 \text{ (đpcm)}$ Vậy ta có điều phải chứng minh.	1,0 điểm

Bài 6. (5,0 điểm) Có mười người đến dự một buổi tiệc. Biết rằng mỗi người quen đúng ba người, hai người quen nhau thì không có người quen chung và hai người không quen nhau thì có đúng một người quen chung. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chiếc bàn tròn để có thể xếp mười người này ngồi sao cho hai người bất kì ngồi cạnh nhau thì quen nhau?

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
Bài 6 (5. điểm)	Giả sử 10 người trong đề bài là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{10}$. Do giả thiết mỗi người quen với đúng 3 người nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng A_1 quen với A_2, A_3, A_4.	1,0 điểm
	Mặt khác, hai người quen nhau sẽ không có người quen chung nên ba người A_2, A_3, A_4 này sẽ đôi một không quen nhau và như thế, ngoài A_1 ra thì mỗi người trong số ba người này sẽ có thêm 2 người quen nữa (tất cả 6 người này cũng đôi một khác nhau).	1,0 điểm
	 Giả sử A_2 quen với A_5, A_6; A_3 quen với A_7, A_8; A_4 quen với A_9, A_{10}.	
	Dễ thấy A_5 không quen A_6 vì hai người này đã có quen với A_2; A_5 cũng không thể quen với đồng thời A_7, A_8 (hoặc A_9, A_{10}) vì mỗi cặp	

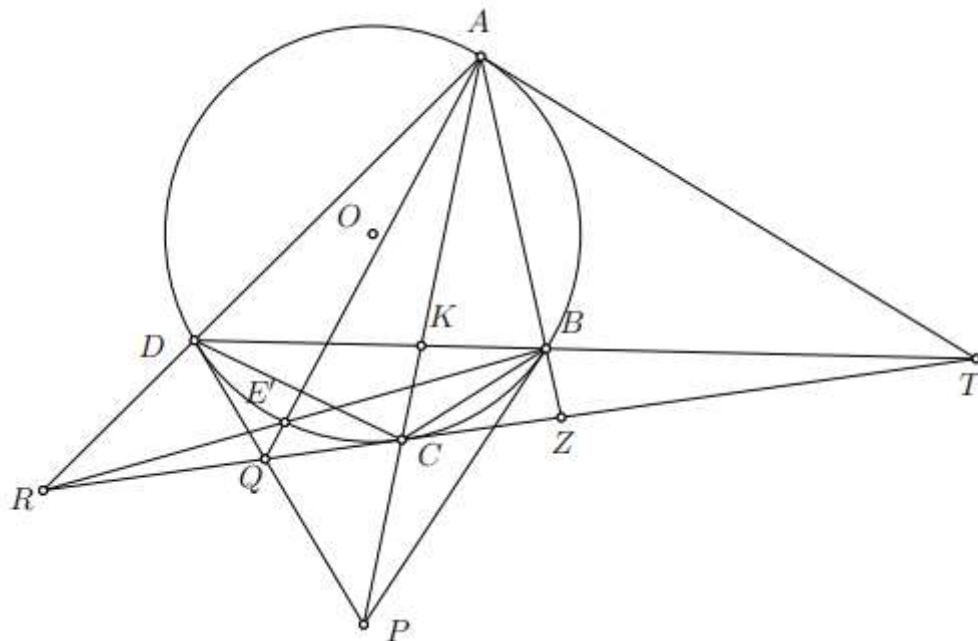
	này đã có người quen chung. Suy ra A_5 quen với một người thuộc $\{A_7, A_8\}$ và một người thuộc $\{A_9, A_{10}\}$. Ta lại giả sử A_5 quen với A_7, A_9. Khi đó, ta phải có A_6 quen với A_8, A_{10}. Tiếp theo, ta cũng dễ thấy được A_7 không thể quen với A_8, A_9 nên A_7 quen với A_{10} và tương tự, A_8 quen với A_9.	1,0 điểm
	Ta sẽ chứng minh rằng không thể chỉ dùng một bàn tròn để sắp xếp những người này. Thật vậy, đặt $X = \{A_2, A_5, A_6\}, Y = \{A_3, A_7, A_8\}, Z = \{A_4, A_9, A_{10}\}$. Dễ thấy rằng A_5, A_6 không quen nhau nên khi ngồi trên cùng một bàn, giữa A_5 và A_6 cũng như giữa A_7 và A_8 sẽ đi qua tất cả các phần tử trong tập Z. Và như thế, chỉ có một trong hai trường hợp sau xảy ra $A_2 \rightarrow A_5 \rightarrow A_7 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_4 \rightarrow A_9 \rightarrow A_8 \rightarrow A_6 \rightarrow A_2.$ $A_2 \rightarrow A_5 \rightarrow A_7 \rightarrow A_3 \rightarrow A_1 \rightarrow A_4 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_6 \rightarrow A_2$ Rõ ràng trường hợp này không thỏa mãn nên không thể chỉ dùng một bàn tròn để sắp xếp tất cả những người này lên thỏa mãn điều kiện đề bài được.	1,0 điểm
	Với 2 bàn tròn, ta có thể sắp xếp 2 nhóm người như sau: $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_5 \rightarrow A_7 \rightarrow A_3 \rightarrow A_1$ $A_4 \rightarrow A_9 \rightarrow A_8 \rightarrow A_6 \rightarrow A_{10} \rightarrow A_4$ Vậy số bàn tròn nhỏ nhất cần tìm là 2.	1,0 điểm

Bài 7. (5,0 điểm) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Lấy P thuộc AC sao cho PB và PD là tiếp tuyến của (O) . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt PD tại Q và cắt AD tại R . Gọi E là giao điểm thứ hai của AQ với (O) . Chứng minh rằng B, E, R thẳng hàng.

Hướng dẫn giải

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
-----	--------------------	------

Bài 7.
(5 điểm)



Gọi BR cắt (O) tại điểm thứ hai là E' , AB, AD, BD cắt tiếp tuyến tại C của (O) lần lượt tại Z, R, T . Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại K . Do $ABCD$ là tứ giác điều hòa nên TA là tiếp tuyến của (O) .

1,0 điểm

Do đó $(T, K, B, D) = -1$.

1,0 điểm

Ta có $-1 = (T, K, B, D) = A(T, C, Z, R) = (T, C, Z, R)$.

1,0 điểm

Xét phép chiếu tâm B ta có: $B(D, C, A, E') = B(T, C, Z, R) = (T, C, Z, R) = -1$
Suy ra tứ giác $ACE'D$ là tứ giác điều hòa.

1,0 điểm

Mặt khác tứ giác $ACED$ cũng là tứ giác điều hòa. Do đó $E \equiv E'$ (đpcm).

1,0 điểm

----- Hết -----