

**SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
THANH HÓA**

**KÌ THI CHỌN HSG MÔN VĂN HÓA CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2020-2021**

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN – Lớp 9 THCS

Ngày thi: 16 tháng 12 năm 2020

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề gồm có 05 câu, gồm 01 trang)

Câu I: (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức $P = \left(1 - \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right) : \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

2. Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn $a^3 + 1 = 3a; b^3 + 1 = 3b; c^3 + 1 = 3c$.

Tính giá trị biểu thức: $Q = a^2 + b^2 + c^2$

Câu II: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $15(x^3 + x^2 + 2x) = 4\sqrt{5}(x^2 + 2)\sqrt{x^4 + 4}$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) = y \end{cases}$$

Câu III: (4,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn phương trình:

$$2^x x^2 = 9y^2 - 12y + 19$$

2. Cho x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + 58$ chia hết cho xy.

Chứng minh: $\frac{x^2 + y^2 + 58}{xy}$ chia hết cho 12.

Câu IV: (6,0 điểm).

Cho đường tròn (I, r) có hai bán kính IE, IF vuông góc với nhau. Kẻ hai tiếp tuyến với đường tròn (I) tại E và F, cắt nhau tại A. Trên tia đối của tia EA lấy điểm B sao cho $EB > r$, qua B kẻ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn (I). D là tiếp điểm, BD cắt tia AF tại C. Gọi K là giao điểm của AI với FD.

1) Chứng minh hai tam giác IAB và FAK đồng dạng.

2) Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với BC, cắt FD tại P. Gọi M là trung điểm của AB, MI cắt AC tại Q. Chứng minh tam giác APQ là tam giác cân.

3) Xác định vị trí của điểm B để chu vi tam giác AMQ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo r

Câu V: (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + 4xyz = 2(xy + yz + zx)$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x(1-y)(1-z)$

Hết

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích thêm.

Họ và tên thí sinh:

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – THANH HÓA (2020 – 2021)

Câu I.

1) Với điều kiện , ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(1 - \frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}\right) : \left(\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\right) : \left(\frac{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} + \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{9-x}{(\sqrt{x}-2)(3+\sqrt{x})}\right) \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{9-x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} + \frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(3+\sqrt{x})} - \frac{9-x}{(\sqrt{x}-2)(3+\sqrt{x})}\right) \\ &= \frac{3+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} : \left(\frac{9-x+x-4\sqrt{x}+4-9+x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)} + \frac{x-4(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}\right) \\ &= \frac{3}{3+\sqrt{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)^2} = \frac{3}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$

2. Từ giả thiết $a^3+1=3a; b^3+1=3b; c^3+1=3c$, ta có:

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 3(a-b) \\ b^3 - c^3 = 3(b-c) \\ c^3 - a^3 = 3(c-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3 & (1) \\ b^2 + bc + c^2 = 3 & (2) \\ c^2 + ca + a^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a^2 - c^2 + ab - bc = 0 \Leftrightarrow (a-c)(a+b+c) = 0 \Leftrightarrow a+b+c = 0$

Cộng (1); (2) ;(3) về với về ta có:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + ab + bc + ca = 9$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2ab + 2bc + 2ca = 18$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) + (a+b+c)^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) + 0 = 18$$

Vậy $Q=6$

Câu II.

1) Phương trình tương đương: $15x(x^2+x+2) = 4\sqrt{5}(x^2+2)\sqrt{x^4+4}$

Vì $x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0; x^2+2 > 0; \sqrt{x^4+4} > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

Suy ra $x > 0$

Chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$15\left(x + \frac{2}{x} + 1\right) = 4\sqrt{x}\left(x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(x + \frac{2}{x}\right) - 4}$$

Đặt $t = x + \frac{2}{x}$, với $x > 0$ suy ra $t \geq 2\sqrt{2}$

Phương trình:

$$15(t+1) = 4\sqrt{5t}\sqrt{t^2-4}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{5t}\sqrt{t^2-4} - 20t + 5t - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{t}\left(\sqrt{t^2-4} - \sqrt{5}\right) + 5(t-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sqrt{5t}(t^2-9)}{\sqrt{t^2-4} + \sqrt{5}} + 5(t-3) = 0 \Leftrightarrow (t-3)\left[\frac{4\sqrt{5t}(t+3)}{\sqrt{t^2-4} + \sqrt{5}} + 5\right] = 0$$

TH1: $t=3$ (t/m $t \geq 2\sqrt{2}$)

$$x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \quad (t/m)$$

$$\text{TH2: } \frac{4\sqrt{5t}(t+3)}{\sqrt{t^2-4} + \sqrt{5}} + 5 = 0$$

$$\text{Vì } t \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{4\sqrt{5t}(t+3)}{\sqrt{t^2-4} + \sqrt{5}} > 0 \Rightarrow \text{Vô nghiệm}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm : $x=1$; $x=2$

$$2) \text{ Ta có: } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 4y + 1 = 0 \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + y(x + y) = 4y \\ (x^2 + 1)(x + y - 2) = y \end{cases}$$

Với $y = 0$, phương trình thứ nhất vô nghiệm nên hpt vô nghiệm.

Với $y \neq 0$, chia từng vế của mỗi phương trình cho y ta được.

$$\text{Hệ phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + (x+y-2) = 2 \\ \left(\frac{x^2+1}{y}\right)(x+y-2) = 1 \end{cases}$$

Đặt $\frac{x^2+1}{y} = m, x+y-2 = 2$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} m+n=2 \\ m.n=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = 1 \\ x+y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ (x-1)(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=-2 \\ y=5 \end{cases}$

Câu III.

1) Ta có: $2^x x^2 = 9y^2 - 12y + 19 \Leftrightarrow 2^x x^2 = (3y - 2)^2 + 15$

+) Nếu x lẻ thì $x = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$\Rightarrow 2^x x^2 = 2^{2k+1} x^2 = (3+1)^k \cdot 2x^2 \equiv 2x^2 \pmod{3}. \text{ Mà } x^2 \equiv 0; 1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 4^k \cdot x^2 \equiv 0; 2 \pmod{3}$$

$$\text{Mặt khác: } (3y - 2)^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

Vậy x không thể là số lẻ

+) Nếu x chẵn thì $x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có phương trình: } 2^{2k} \cdot 4^2 - (3y - 2)^2 = 15 \Leftrightarrow (2^k \cdot 2k - 3y + 2)(2^k \cdot 2k + 3y - 2) = 15 \quad (*)$$

Vì $k, y \in \mathbb{N}^*$ nên $2^k \cdot 2k + 3y - 2 > 2^k \cdot 2k - 3y + 2$ và $2^k \cdot 2k + 3y - 2 > 0$ nên $2^k \cdot 2k - 3y + 2 > 0$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k + 3y - 2 = 15 \\ 2^k \cdot 2k - 3y + 2 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k + 3y - 2 = 5 \\ 2^k \cdot 2k - 3y + 2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 2^k \cdot 2k + 3y - 2 = 15 \\ 2^k \cdot 2k - 3y + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k = 8 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 2^k \cdot 2k + 3y - 2 = 5 \\ 2^k \cdot 2k - 3y + 2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^k \cdot 2k = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x; y) = (2; 1)$

$$2) \text{ Đặt } k = \frac{x^2 + y^2 + 58}{xy}, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow kxy = x^2 + y^2 + 58. \text{ Ta chứng minh } k:12 \Leftrightarrow \begin{cases} k:3 \\ k:4 \end{cases}$$

+ Nếu trong hai số x, y có một số chỉ hết cho 3.

Do vai trò x, y bình đẳng, giả sử $x:3 \Rightarrow xy:3$

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + 58:xy \Rightarrow x^2 + y^2 + 58:3 \Rightarrow y^2 + 1:3 \Rightarrow y^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

Vô lí vì y^2 là số chính phương

Vì vậy cả x, y đều không chia hết cho 3 mà 3 là nguyên tố.

$$\Rightarrow (xy, 3) = 1; x^2 \equiv 1 \pmod{3}; y^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x^2 + y^2 + 58 \equiv 1 + 1 + 1 = 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 58:3 \Rightarrow kxy = x^2 + y^2 + 58 \text{ mà } (xy, 3) = 1 \Rightarrow k:3 \quad (1)$$

+ Nếu trong hai số x, y có một số chia hết cho 2.

Do vai trò x, y như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $x:2 \Rightarrow xy:2$

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + 58:xy \Rightarrow x^2 + y^2 + 58:2 \text{ mà } x:2, 58:2 \Rightarrow y^2:2 \Rightarrow xy:4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 58:4 \text{ vô lí vì } x:4, y:4 \text{ do } x:2, y:2 \text{ mà } 58 \text{ không chia hết cho } 4.$$

Vì vậy cả x, y đều không chia hết cho 2.

$$\Rightarrow x, y \text{ đều lẻ} \Rightarrow x-1, x+1, y-1, y+1 \text{ đều chia hết cho } 2.$$

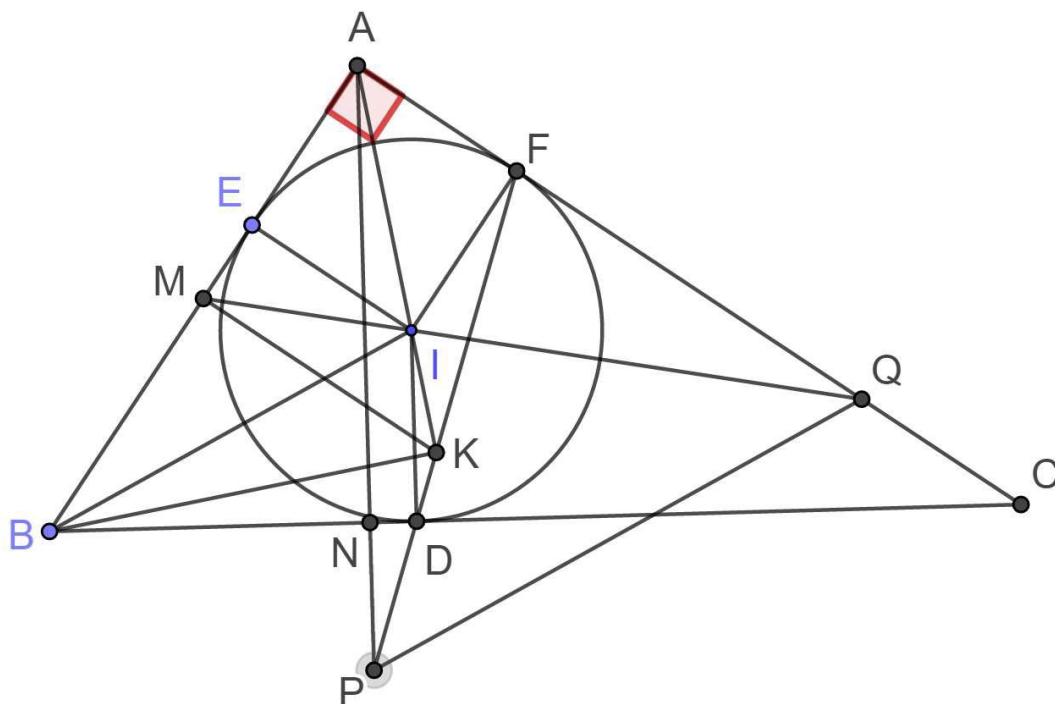
$$\Rightarrow x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \text{ và } y^2 - 1 = (y-1)(y+1) \text{ đều chia hết cho } 4$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 58 = x^2 - 1 + y^2 - 1 + 60:4 \Rightarrow kxy = x^2 + y^2 + 58:4$$

$$\text{Mà } (xy, 4) = 1 \text{ do } x, y \text{ lẻ} \Rightarrow k:4$$

$$\text{Từ (1) và (2) kết hợp với } (3, 4) = 1 \Rightarrow k:12 \quad (\text{đpcm})$$

Câu IV.



1) Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $CD = CE \Rightarrow \triangle CDF$ cân tại C

$$\Rightarrow \widehat{CFD} = \frac{180^\circ - \widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{AFK} = 180^\circ - \widehat{CFK} = \frac{180^\circ + \widehat{C}}{2} \quad (1)$$

Tứ giác AEIF có ba góc vuông nên là hình chữ nhật > Hình chữ nhật AEIF có $IE = IF$ nên là hình vuông. Suy ra $\widehat{IAB} = \widehat{FAK} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AIB} = 180^\circ - (\widehat{IAB} + \widehat{ABI}) = 180^\circ - (45^\circ + \frac{\widehat{ABC}}{2}) = \frac{180^\circ + \widehat{C}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{ABI} = \widehat{AFK}$ kết hợp $\widehat{IAB} = \widehat{FAK} \Rightarrow \triangle IAB \sim \triangle FAK$ (g.g)

2) Vì $\triangle IAB \sim \triangle FAK$ nên $\frac{IA}{AB} = \frac{FA}{AK} \Rightarrow \frac{IA}{AB} = \frac{EA}{AK}$ (vì $FA = EA$). Đẳng thức này kết hợp

với điều kiện $\widehat{IAE}$ chung, suy ra $\triangle AKB \sim \triangle AEI$ (c.g.c)

$\triangle AEI$ vuông cân tại E nên $\triangle AKB$ vuông tại K. Suy ra đường trung tuyến KM cũng là đường cao nên $KM \perp AB$

Ta có: $KM \perp AB, IE \perp AB, AC \perp AB \Rightarrow KM \parallel IE \parallel AC$

$\Rightarrow ID \perp BC, AP \perp BC \Rightarrow ID \parallel AP$

Áp dụng định lý Talet và hệ quả Talet, kết hợp $ID = IE$.

$$\frac{ID}{AP} = \frac{KI}{KA} = \frac{ME}{MA} = \frac{IE}{AQ} \Rightarrow AP = AQ$$

$\Rightarrow \Delta APQ$ cân tại A

3) Đặt $ME = x$, $PQ = y$ với $x > 0$, $y > 0$

$$\Rightarrow \Delta MEI \sim \Delta IFQ \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{ME}{IF} = \frac{EI}{FQ} \Rightarrow xy = r^2 \quad (1)$$

Chu vi ΔAMQ là:

$$\begin{aligned} C_{AMQ} &= AM + AQ + MQ + \sqrt{AM^2 + AQ^2} \\ &= 2r + (x + y) + \sqrt{(x^2 + y^2) + 2r(x + y) + 2r^2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi cho hai số thực dương x, y ta có:

$$C_{AMQ} = 2r + (x + y) + \sqrt{(x^2 + y^2) + 2r(x + y) + 2r^2} \geq 2r + 2\sqrt{xy} + \sqrt{2\sqrt{x^2 y^2} + 2r \cdot 2\sqrt{xy} + 2r^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $C_{AMQ} \geq (4 + 2\sqrt{2})r$

Dấu (=) xảy ra khi $x = y = r$ hay $EB = 3r$.

Vậy khi $EB = 3r$ thì chu vi tam giác AMQ nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất bằng $(4 + 2\sqrt{2})r$

Câu V.

$$+ \text{ Ta có: } P \leq x \left[1 - (y + z) + \frac{(y + z)^2}{4} \right] \Leftrightarrow 4P \leq [2 - (y + z)]^2$$

$$+ \text{ Từ giả thiết ta suy ra được: } x^2 + (y + z)^2 - 2x(y + z) = (1 - x)4yz$$

$$+ \text{ Nhận thấy } x^2 + (y + z)^2 - 2x(y + z) = (x - y - z)^2 \geq 0 \text{ nên } x \leq 1$$

+ Vì vậy:

$$x^2 + (y + z)^2 - 2x(y + z) = (1 - x)4yz \leq (1 - x)(y + z)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x(y + z) \leq -x(y + z)^2 \Rightarrow x - 2(y + z) \leq -(y + z)^2$$

$$\Rightarrow x \leq (y + z)[2 - (y + z)]$$

$$+ \text{ Suy ra } 4P \leq (y + z)[2 - (y + z)]^2$$

Đặt: $2 - (y + z) = t$, ta có:

$$\begin{cases} x \leq (y + z)[2 - (y + z)] \\ x > 0 \\ y + z > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 - (y + z) > 0 \Rightarrow 0 < t < 2 \quad (*)$$

$$\text{Khi đó ta có } 4P \leq (2 - t)t^3 \Rightarrow 12P \leq (6 - 3t).t.t.t \leq \left(\frac{6 - 3t + t + t + t}{4} \right)^4 = \frac{81}{16} \Rightarrow P \leq \frac{27}{64}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 6 - 3t = t \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \text{ (t/m (*))}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{27}{64} \text{ khi và chỉ khi } \begin{cases} y = z \\ 2 - (y + x) = \frac{3}{2} \\ x = (y + z)[2 - (y + z)] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}; y = z = \frac{1}{4}$$