

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN LÂM ĐỒNG 2021

Nguyễn Vũ Trung Quân¹, Nguyễn Hoàng Ân², Nguyễn Ngọc Đăng Khoa³, Đào Sơn Trà²

¹Học viên Cao học, Viện Toán học

²Giáo viên THPT chuyên Thăng Long Đà Lạt

³Học viên Cao học, Đại học Đà Lạt

<https://fb.com/m49.learning>

Ngày 25 tháng 9 năm 2021

CÂU 1. Giải phương trình sau trên tập số thực

$$2x^3 - x^2 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = 3x + 1 + \sqrt[3]{x^2 + 2}.$$

Lời giải.

Phương trình tương đương

$$2x^3 - 3x + 1 + \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} = x^2 + 2 + \sqrt[3]{x^2 + 2}.$$

Đặt $f(t) = t^3 + t$ ($t \in \mathbb{R}$). Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 Khi đó phương trình trở thành

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1}\right) &= f\left(\sqrt[3]{x^2 + 2}\right) \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x^3 - 3x + 1} &= \sqrt[3]{x^2 + 2} \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 3x + 1 &= x^2 + 2 \\ \Leftrightarrow (2x + 1)(x^2 - x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

□

BÌNH LUẬN

Bài toán trên là một ứng dụng về tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình. Ta sử dụng định lý "Cho hàm số $y = f(x)$ đơn điệu (ngắt) trên D . Khi đó, với mọi $u, v \in D$ thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$ ". Dạng toán này đã khá quen thuộc đối với học sinh, tuy nhiên độ phức tạp của phương trình phụ thuộc vào cách chọn hàm $f(x)$, cách đặt u, v và việc sử dụng các phép biến đổi đại số. Đối với bài toán trên thì việc phát hiện và nhận dạng dạng toán khá đơn giản, ta chỉ cần chuyển về là có thể đặt được hàm số và các ẩn phụ tương ứng. Sau đây là một số bài tập tương tự.

- ① $\frac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt[3]{3x+2}-7} = \frac{1}{x+3}.$
- ② $27x^3 - 27x^2 + 15x - 3 = (9x+1)\sqrt{9x-1}.$
- ③ $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1} + 3x\sqrt{9x^2+3} + 10x + 2 = 0.$

CÂU 2. Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$. Cho $a_n = \frac{f(1).f(3)\dots f(2n-1)}{f(2).f(4)\dots f(2n)}$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Lời giải.

Ta có

$$f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2) = (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1].$$

Khi đó

$$\frac{f(2n-1)}{f(2n)} = \frac{[(2n-1)^2 + 1][(2n)^2 + 1]}{[(2n)^2 + 1][(2n+1)^2 + 1]} = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1}.$$

Suy ra

$$a_n = \prod_{k=1}^n \frac{f(2k-1)}{f(2k)} = \prod_{k=1}^n \frac{(2k-1)^2 + 1}{(2k+1)^2 + 1} = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}.$$

Vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

□

CÂU 3. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $2x + 4y + 7z = 2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Lời giải.

Nhận xét. Đây là đề thi Vietnam TST 2001. Dưới đây xin trình bày ba cách, sau phần lời giải sẽ có mục phân tích ý tưởng.

Cách 1. Trước hết ta nhắc lại bất đẳng thức AM-GM suy rộng, được phát biểu như sau

"Cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực không âm và $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là các số thực dương. Đặt $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$x_1^{\alpha_1} + x_2^{\alpha_2} + \dots + x_n^{\alpha_n} \geq \alpha x_1^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} x_2^{\frac{\alpha_2}{\alpha}} \dots x_n^{\frac{\alpha_n}{\alpha}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$."

Để thấy rằng khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$, ta được bất đẳng thức AM-GM thường gặp.

Trở lại bài toán. Đặt $\alpha = 3, \beta = \frac{5}{2}, \gamma = 2$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng ta có

$$\begin{aligned} x + y + z &= \alpha \cdot \frac{x}{\alpha} + \beta \cdot \frac{y}{\beta} + \gamma \cdot \frac{z}{\gamma} \geq (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}} \cdot \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}} \cdot \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}} \\ &= \frac{15}{2} \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{5}} \left(\frac{2y}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{4}{15}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 7z &= 2\alpha \cdot \frac{x}{\alpha} + 4\beta \cdot \frac{y}{\beta} + 7\gamma \cdot \frac{z}{\gamma} \geq (2\alpha + 4\beta + 7\gamma) \cdot \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+4\beta+7\gamma}} \cdot \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{4\beta}{2\alpha+4\beta+7\gamma}} \cdot \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\frac{7\gamma}{2\alpha+4\beta+7\gamma}} \\ &= 30 \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{2y}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{7}{15}}. \end{aligned}$$

Bình phương hai vế bất đẳng thức thứ nhất, sau đó đem nhân vế theo vế cho bất đẳng thức thứ hai, ta thu được

$$(x + y + z)^2 (2x + 4y + 7z) \geq \frac{15^2}{2} xyz.$$

Chú ý rằng $2x + 4y + 7z = 2xyz$ ta suy ra $P = x + y + z \geq \frac{15}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$, đạt được khi $x = 3, y = \frac{5}{2}, z = 2$.

Cách 2. Từ giả thiết ta suy ra $z = \frac{2x + 4y}{2xy - 7}$. Như vậy ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + \frac{2x + 4y}{2xy - 7},$$

trong đó $2xy - 7 > 0$. Ta có

$$P = \left[\frac{9}{16} \left(\frac{2xy - 7}{2x} \right) + \frac{2x}{2xy - 7} \right] + \left[\frac{25}{16} \left(\frac{2xy - 7}{4y} \right) + \frac{4y}{2xy - 7} \right] + \left(\frac{7}{32}x + \frac{9}{16} \cdot \frac{7}{2x} \right) + \left(\frac{7}{16}y + \frac{25}{16} \cdot \frac{7}{4y} \right),$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho từng biểu thức trong ngoặc, ta có

$$\frac{9}{16} \left(\frac{2xy - 7}{2x} \right) + \frac{2x}{2xy - 7} \geq \frac{3}{2},$$

$$\frac{25}{16} \left(\frac{2xy - 7}{4y} \right) + \frac{4y}{2xy - 7} \geq \frac{5}{2},$$

$$\frac{7}{32}x + \frac{9}{16} \cdot \frac{7}{2x} \geq \frac{21}{16},$$

$$\frac{7}{16}y + \frac{25}{16} \cdot \frac{7}{4y} \geq \frac{35}{16}.$$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta thu được $P \geq \frac{15}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$, đạt được khi $x = 3, y = \frac{5}{2}$ và $z = 2$.

Cách 3. (Dựa theo 'Lời giải đề thi chọn đội tuyển Quốc gia dự thi IMO 2001' của tác giả Lê Phúc Lữ) Cũng như Cách 2, ta quy về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + \frac{2x + 4y}{2xy - 7},$$

trong đó $x, y > 0$ và $2xy - 7 > 0$.

Ta có

$$P = x + y + \frac{2x + 2\left(\frac{2yx - 7}{x} + \frac{7}{x}\right)}{2xy - 7} = x + y + \frac{2}{x} + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7} = x + \frac{11}{2x} + \left(y - \frac{7}{2x}\right) + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta được

$$\left(y - \frac{7}{2x}\right) + \frac{2x + \frac{14}{x}}{2xy - 7} \geq 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta lại có

$$(3^2 + 7)\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \geq \left(3 + \frac{7}{x}\right)^2.$$

Do đó

$$P \geq x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} \geq x + \frac{11}{2x} + \frac{3 + \frac{7}{x}}{2} = x + \frac{9}{x} + \frac{3}{2} \geq 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{2}$. Đạt được khi $x = 3$, từ đó $y = \frac{5}{2}$ và $z = 2$.

PHÂN TÍCH Ý TƯỞNG

Cái khó của những lời giải trên là làm sao tìm được "điểm rơi", hay cụ thể là $x = 3, y = \frac{5}{2}, z = 2$. Sau đây chúng ta sẽ đi vào phân tích chi tiết con đường đi tìm lời giải cho mỗi cách giải trên.

Cách 1. Ta sẽ phân tích tại sao lại có các số $(\alpha, \beta, \gamma) = (3, \frac{5}{2}, 2)$. Bài toán có thể được viết dưới dạng chứng minh một bất đẳng thức đồng bậc (bậc ba)

$$(2x + 4y + 7z)(x + y + z)^2 \geq 2k^2xyz,$$

trong đó $k > 0$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm. Giả sử giá trị nhỏ của P đạt được khi $x = \alpha, y = \beta, z = \gamma$, trong đó α, β, γ là các số thực dương được xác định sau. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng ta có

$$x + y + z = \alpha \cdot \frac{x}{\alpha} + \beta \cdot \frac{y}{\beta} + \gamma \cdot \frac{z}{\gamma} \geq (\alpha + \beta + \gamma) \cdot \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}} \cdot \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}} \cdot \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}}, \quad (1)$$

$$2x + 4y + 7z = 2\alpha \cdot \frac{x}{\alpha} + 4\beta \cdot \frac{y}{\beta} + 7\gamma \cdot \frac{z}{\gamma} \geq (2\alpha + 4\beta + 7\gamma) \cdot \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+4\beta+7\gamma}} \cdot \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{4\beta}{2\alpha+4\beta+7\gamma}} \cdot \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\frac{7\gamma}{2\alpha+4\beta+7\gamma}}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thu được

$$(x + y + z)^2(2x + 4y + 7z) \geq (\alpha + \beta + \gamma)^2(2\alpha + 4\beta + 7\gamma) \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} + \frac{2\alpha}{2\alpha+4\beta+7\gamma}} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2\beta}{\alpha+\beta+\gamma} + \frac{4\beta}{2\alpha+4\beta+7\gamma}} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\frac{2\gamma}{\alpha+\beta+\gamma} + \frac{7\gamma}{2\alpha+4\beta+7\gamma}}. \quad (3)$$

Để thu được bất đẳng thức đồng bậc ba như mong muốn, các lũy thừa của x, y, z trong (3) phải bằng 1. Từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{2\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} + \frac{2\alpha}{2\alpha + 4\beta + 7\gamma} = 1 \\ \frac{2\beta}{\alpha + \beta + \gamma} + \frac{4\beta}{2\alpha + 4\beta + 7\gamma} = 1 \\ \frac{2\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} + \frac{7\gamma}{2\alpha + 4\beta + 7\gamma} = 1 \end{cases}$$

việc giải hệ phương trình này xin dành lại cho bạn đọc. Sau khi giải hệ phương trình trên, ta thu được $\alpha = 3$, $\beta = \frac{5}{2}$ và $\gamma = 2$.

Cách 2. Ta sẽ phân tích làm thế nào để có thể viết P dưới dạng bốn biểu thức trong ngoặc. Nhắc lại rằng ta quy về tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + \frac{2x + 4y}{2xy - 7},$$

trong đó $x, y > 0$ và $2xy - 7 > 0$.

Ta thấy rằng biểu thức gây 'khó chịu' nhất là $\frac{2x + 4y}{2xy - 7}$, do đó ta cần có các đánh giá phù hợp để khử biểu thức này trước.

Ta làm như sau. Giả sử giá trị nhỏ nhất của P đạt được khi $x = \alpha, y = \beta$, trong đó α, β là các số thực dương chọn sau thỏa mãn $2\alpha\beta - 7 > 0$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\left(\frac{2xy - 7}{2x}\right) \left(\frac{2\alpha}{2\alpha\beta - 7}\right)^2 + \frac{2x}{2xy - 7} \geq 2 \cdot \frac{2\alpha}{2\alpha\beta - 7},$$

$$\left(\frac{2xy - 7}{4y}\right) \left(\frac{4\beta}{2\alpha\beta - 7}\right)^2 + \frac{4y}{2xy - 7} \geq 2 \cdot \frac{4\beta}{2\alpha\beta - 7},$$

Trong hai đánh giá trên, lưu ý rằng các biểu thức $\frac{2xy-7}{2x}$ và $\frac{2xy-7}{4y}$ xuất hiện là để xử lý biểu thức ta cần khử; còn các biểu thức có chứa α, β là để đảm bảo dấu bằng.

Như vậy

$$P = x + y + \frac{2x + 4y}{2xy - 7}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{4\alpha}{2\alpha\beta - 7} + \frac{8\alpha}{2\alpha\beta - 7} + \left[\left(\frac{2\alpha}{2\alpha\beta - 7}\right)^2 \left(\frac{7}{2x}\right) + \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{4\beta}{2\alpha\beta - 7}\right)^2\right) x \right] + \left[\left(\frac{4\beta}{2\alpha\beta - 7}\right)^2 \left(\frac{7}{4y}\right) + \left(1 - \left(\frac{2\alpha}{2\alpha\beta - 7}\right)^2\right) y \right] \\ &= \frac{4\alpha}{2\alpha\beta - 7} + \frac{8\alpha}{2\alpha\beta - 7} + \frac{1}{(2\alpha\beta - 7)^2} \left[\frac{14\alpha^2}{x} + ((2\alpha\beta - 7)^2 - 8\beta^2)x + \frac{28\beta^2}{y} + ((2\alpha\beta - 7)^2 - 4\alpha^2)y \right]. \end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{14\alpha^2}{x} + ((2\alpha\beta - 7)^2 - 8\beta^2)x \geq 2\alpha\sqrt{14((2\alpha\beta - 7)^2 - 8\beta^2)},$$

$$\frac{28\beta^2}{y} + ((2\alpha\beta - 7)^2 - 4\alpha^2)y \geq 2\beta\sqrt{28((2\alpha\beta - 7)^2 - 4\alpha^2)}.$$

Mặt khác, khi giá trị nhỏ nhất của P đạt được khi $x = \alpha$ và $y = \beta$ ta cũng có các bất đẳng thức sau

$$\frac{14\alpha^2}{x} + 14x \geq 28\alpha; \quad \frac{28\beta^2}{y} + 28y \geq 28\beta.$$

Do đó, để "đảm bảo dấu bằng", các đẳng thức sau phải được thỏa mãn

$$\begin{cases} (2\alpha\beta - 7)^2 - 8\beta^2 = 14, \\ (2\alpha\beta - 7)^2 - 4\alpha^2 = 28 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế đẳng thức thứ hai cho đẳng thức thứ nhất ta thu được $\beta = \frac{\sqrt{2\alpha^2 + 7}}{2}$, sau đó thay vào đẳng thức đầu tiên và rút gọn ta thu được phương trình một ẩn

$$2\alpha^4 + 3\alpha^2 + 21 - 14\sqrt{2\alpha^4 + 7\alpha^2} = 0.$$

Đặt $t = \alpha^2$, bình phương hai vế và thu gọn ta thu được phương trình

$$(t - 9)(t + 7)(4t^2 + 20t - 7) = 0,$$

có hai nghiệm dương là $t = 9$ và $t = \frac{-5 + 4\sqrt{2}}{2}$. Ta loại nghiệm thứ hai vì nó không thỏa mãn $2\alpha\beta - 7 > 0$.
 Như vậy $t = 9$ hay $\alpha = 3$, suy ra $\beta = \frac{5}{2}$.

Cách 3. Ta sẽ phân tích tại sao lại có đánh giá

$$(3^2 + 7) \left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \geq \left(3 + \frac{7}{x}\right)^2.$$

Nhắc lại rằng theo lời giải đã trình bày, ta có

$$P \geq x + \frac{11}{2x} + 2\sqrt{1 + \frac{7}{x^2}} = Q.$$

Giả sử Q đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \alpha > 0$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\left(1 + \frac{7}{x^2}\right) (m^2 + n^2) \geq \left(m + \frac{n\sqrt{7}}{x}\right)^2,$$

trong đó m, n là các số thực chọn sau thỏa mãn điều kiện xảy ra đẳng thức của bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, đó là

$$\frac{1}{m} = \frac{\sqrt{7}}{nx} = \frac{\sqrt{7}}{n\alpha}.$$

Như vậy

$$Q \geq x + \frac{11}{2x} + 2 \frac{m + \frac{n\sqrt{7}}{x}}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{2m}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \left(\frac{2n\sqrt{7}}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{11}{2}\right) \frac{1}{x} + x.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho hai số hạng cuối trong đánh giá trên, ta thu được giá trị nhỏ nhất (của Q và của P). Mặt khác khi Q đạt giá trị nhỏ nhất thì $x = \alpha$, nên ta cũng có đánh giá

$$x + \frac{\alpha^2}{x} \geq 2\alpha.$$

Từ đây ta thu được phương trình

$$\frac{2n\sqrt{7}}{\sqrt{m^2 + n^2}} + \frac{11}{2} = \alpha^2,$$

lưu ý rằng $\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{\sqrt{7}}$ nên phương trình này được viết lại

$$\frac{14}{\sqrt{\alpha^2 + 7}} + \frac{11}{2} = \alpha^2.$$

Giải phương trình này tìm được $\alpha = 3$. Từ đó, chẳng hạn, ta có thể chọn $(m, n) = (3, \sqrt{7})$.

BÌNH LUẬN

Kỹ thuật hệ số bất định là một kỹ thuật hiệu quả trong nhiều bài toán đại số. Nó đòi hỏi học sinh cần hiểu kỹ kiến thức (ví dụ: bất đẳng thức AM-GM, AM-GM suy rộng, Cauchy-Schwarz cũng như các trường hợp xảy ra dấu '=' của các bất đẳng thức này) để thiết lập được các đẳng thức, cũng như kỹ năng giải phương trình, hệ phương trình.

Sau đây là một số bài tập về kỹ thuật hệ số bất định (bạn đọc cũng có thể thử tìm những lời giải khác).

i) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^{10}b + b^{10}c + c^{10}a \geq a + b + c.$$

ii) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{2b+c+a} + \frac{1}{2c+a+b}.$$

iii) (Đề thi HKI lớp 10 chuyên toán Thăng Long 2017- 2018) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+5b} + \frac{1}{b+5c} + \frac{1}{c+5a} \geq \frac{1}{3a+2b+c} + \frac{1}{3b+2c+a} + \frac{1}{3c+2a+b}.$$

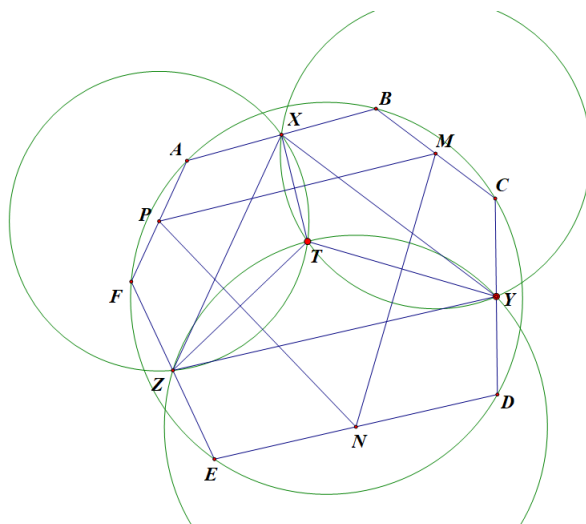
□

CÂU 4.

- a) Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ thỏa mãn $AB = CD = EF = R$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, DE, FA . Chứng minh rằng tam giác MNP là tam giác đều.
- b) Cho tam giác ABC có phân giác trong AD (D thuộc BC) và thỏa mãn các điều kiện $AC + AD = BC$ và $AB + AD = CD$. Hãy tính các góc của tam giác ABC .

Lời giải.

a)



Dễ thấy $ABEF$ là hình thang cân nên $ZX \parallel EB$. Mà $ZP \parallel EA$ nên $\widehat{PZX} = \widehat{AEB} = 60^\circ$. Tương tự $\widehat{PNZ} = 60^\circ$ nên tam giác PXZ cân tại P có $\widehat{NPZ} = 120^\circ$. Ta cũng thu được điều tương tự với các tam giác MXY và tam giác NYZ .

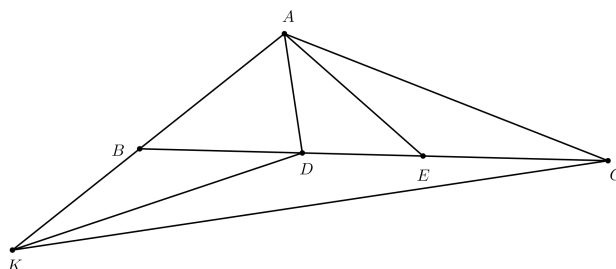
Các đường tròn (P, PX) và (M, MX) cắt nhau tại điểm T khác X . Vì $\widehat{NPZ} = \widehat{XMY} = 120^\circ$ nên dễ dàng suy ra $\widehat{XTZ} = \widehat{XTY} = 120^\circ$. Do đó $\widehat{YTZ} = 120^\circ$ và T thuộc (N, NY) .

Như vậy, ta có $TX \perp PM, TZ \perp PN, \widehat{NTZ} = 120^\circ$ nên $\widehat{MPN} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Tương tự $\widehat{PMN} = 60^\circ$ nên tam giác MNP là tam giác đều. Chứng minh kết thúc.

BÌNH LUẬN

- Đây chính là định lý Napoleon, được phát biểu như sau "Cho tam giác XYZ . Dựng ra phía ngoài các tam giác đều lần lượt có các cạnh là YZ, ZX, XY . Khi đó tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác đều này là ba đỉnh của một tam giác đều". Ngoài chứng minh trên, phép chứng minh phổ biến của định lý này là sử dụng phép quay. Bạn đọc có thể dễ dàng tìm thấy trên mạng.
- Trong trường hợp tam giác XYZ không có góc nào vượt quá 120° , điểm T đề cập trong lời giải còn được gọi là *điểm Toricelli* của tam giác XYZ : là điểm T nằm trong tam giác sao cho tổng $TX + TY + TZ$ nhỏ nhất. Kết quả này có thể chứng minh bằng vector hoặc bằng bất đẳng thức Ptolemy.
- Điểm T trong lời giải trên còn được biết đến với tên gọi *điểm Fermat dương*: "Cho tam giác XYZ . Dựng ra phía ngoài các tam giác đều YXT_1, ZXT_2, XYT_3 . Khi đó XT_1, YT_2, ZT_3 đồng quy tại điểm Fermat dương của tam giác XYZ ". Khi dựng các tam giác đều vào trong, điểm đồng quy được gọi là *điểm Fermat âm*. Hai điểm Fermat có nhiều kết quả khó và thú vị, chẳng hạn như *đường tròn Lester*: "Tâm đường tròn ngoại tiếp, tâm đường tròn Euler và hai điểm Fermat của một tam giác cùng nằm trên một đường tròn". Bạn đọc quan tâm có thể tìm thấy chứng minh của kết quả này trong Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 420 (tháng 6-2012).

b)



Lấy điểm K trên tia AB sao cho $AK = AC$.

Từ giả thiết, ta có $AC - AB = BC - CD = BD$. Mặt khác, ta có $AC - AB = AK - AB = BK$ suy ra $BD = BK$. Do đó, $\angle ABC = 2\angle BKD$.

Xét tam giác cân AKC có AD là phân giác, dễ dàng suy ra được $\angle AKD = \angle ACD$.

Từ đó ta có $\angle ABC = 2\angle ACB$.

Vì $\angle ABC > \angle ACB$ nên ta có thể lấy điểm E thuộc đoạn BC sao cho $AB = AE$.

Khi đó $2\angle ACB = \angle ABC = \angle AEB = \angle EAC + \angle ACB$ suy ra $\angle EAC = \angle ACB$. Do đó, $AB = AE = CE$.

Có $DC - EC = DC - AB = AD$ nên tam giác ADE cân tại D .

Suy ra $\angle DAC = \angle DAE + \angle EAC = \angle DEA + \angle ACB = 3\angle ACB$ hay $\angle BAC = 6\angle ACB$.

Kết hợp với $\angle ABC = 2\angle ACB$ ta thu được $\angle BAC = 120^\circ, \angle ABC = 40^\circ, \angle ACB = 20^\circ$.

□

CÂU 5. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện

$$3f(x) - 2f(f(x)) = x, \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải.

Đặt $g(x) = f(x) - x$. Ta có

$$\begin{aligned} 3f(x) - 2f(f(x)) &= x, \forall x \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 2[f(f(x)) - f(x)] &= f(x) - x, \forall x \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 2g(f(x)) &= g(x), \forall x \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Do đó, với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có

$$g(x) = 2g(f(x)) = 2^2g(f(f(x))) = \dots = 2^n g(f(f(f(\dots)))) = \dots$$

Suy ra $\forall x \in \mathbb{Z}$ và $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $2^n \mid g(x)$.

Vậy $g(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$ hay $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Z}$.

□

BÌNH LUẬN

Thực chất cách làm trên không có nhiều khác biệt so với cách dùng công thức nghiệm của phương trình sai phân. Thật vậy, cố định $x \in \mathbb{Z}$ và đặt $a_0 = x, a_1 = f(x), a_n = f(\dots(f(x))\dots)$ (n lần f). Từ đề bài ta suy ra được hệ thức truy hồi $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Từ hệ thức này ta có

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) = \frac{1}{2^2}(a_n - a_{n-1}) = \dots = \frac{1}{2^{n+1}}(a_1 - a_0), \forall n \in \mathbb{N},$$

từ đó $\left(\frac{a_1 - a_0}{2^{n+1}}\right)$ là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $a_1 - a_0 = 0$ hay $f(x) = x$.

Lưu ý rằng thay vì sử dụng trực tiếp công thức nghiệm của phương trình sai phân cấp hai, ta vừa sử dụng cách xây dựng công thức nghiệm của nó: đưa về phương trình sai phân cấp một (dạng chứa lũy thừa phụ thuộc vào chỉ số).

CÂU 6. Trong quốc gia có $n \geq 2$ thành phố. Giữa hai thành phố bất kỳ có đường bay trực tiếp hai chiều. Người ta muốn cấp phép khai thác cho các đường bay trên cho một số hãng hàng không với các điều kiện sau:

- ① Mỗi đường bay chỉ được cấp phép cho một hãng hàng không duy nhất.
- ② Di chuyển đường bay của một hãng hàng không tùy ý, người ta có thể đi từ một thành phố bất kỳ tới các thành phố còn lại. Hỏi có thể cấp phép cho tối đa bao nhiêu hãng hàng không?

Lời giải.

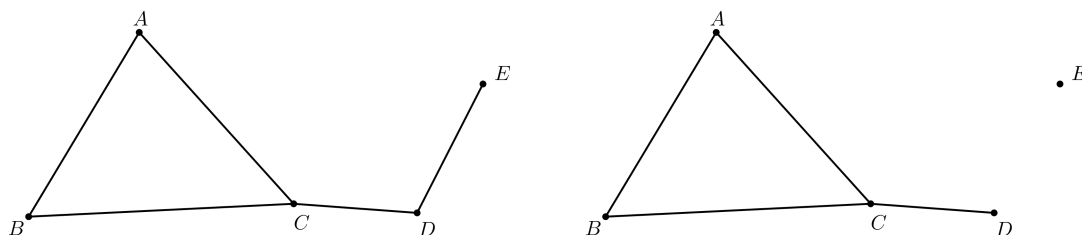
Ta chuyển bài toán về graph, Các thành phố là các đỉnh, các đường bay là cạnh, giả thiết sử dụng đường bay của một hãng hàng không có thể đi đến hết các thành phố còn lại chính là sự liên thông, như vậy ta có bài toán sau:

Có thể phân hoạch một graph đầy đủ n đỉnh thành tối đa bao nhiêu graph con liên thông n đỉnh?

Bổ đề. Một đồ thị n đỉnh liên thông có ít nhất $n - 1$ cạnh ($n \geq 2$).

Ta chứng minh bổ đề trên bằng quy nạp.

- Với $n = 2$, bổ đề là hiển nhiên.
- Giả sử bổ đề đã đúng với $n - 1$.
- Xét graph G có n đỉnh. Do tính liên thông, mỗi đỉnh phải có ít nhất một cạnh xuất phát từ nó.
 - ① Nếu mỗi đỉnh đều có hai cạnh trở lên xuất phát từ nó thì số cạnh của graph sẽ $\geq \frac{2n}{2} = n$.
 - ② Nếu có một đỉnh chỉ có đúng một cạnh xuất phát từ nó thì ta có thể bỏ đỉnh đó cùng cạnh xuất phát từ nó đi, ta vẫn thu được một graph G' $n - 1$ đỉnh liên thông.



(ví dụ ta xét graph liên thông có 5 đỉnh A, B, C, D, E , nhận xét E là một đỉnh mà chỉ có duy nhất một cạnh xuất phát từ nó (ED), khi đó ta có thể bỏ đi đỉnh E và cạnh ED và vẫn thu được graph liên thông gồm 4 đỉnh A, B, C, D .)

- ③ Áp dụng giả thiết quy nạp cho graph G' (liên thông và có $n - 1$ đỉnh), ta có graph này có ít nhất $n - 2$ cạnh. Khôi phục lại graph G bằng cách thêm đỉnh và một cạnh xuất phát từ nó đã bị bỏ, ta có graph G có ít nhất $n - 1$ cạnh.

Vậy bổ đề đúng với n , theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán. Do số cạnh của một graph đầy đủ n đỉnh là $\frac{n(n-1)}{2}$ nên có thể phân hoạch một graph đầy đủ n đỉnh thành không quá $\frac{n(n-1)}{2} : (n-1) = \frac{n}{2}$ graph con liên thông n đỉnh. Tuy nhiên số các phân hoạch phải là số tự nhiên nên có thể phân hoạch một graph đầy đủ n đỉnh thành không quá $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ graph con liên thông n đỉnh.

Chúng ta cần chứng minh giá trị này có thể đạt được.

- ① Với $n = 2k$ ta chứng minh có thể xây dựng được một graph đầy đủ có n đỉnh mà có thể phân hoạch thành k graph con liên thông n đỉnh bằng quy nạp theo k như sau.
 - Khi $k = 1$, bài toán hiển nhiên.
 - Giả sử mệnh đề đúng cho k . (có nghĩa là có thể xây dựng graph đầy đủ $2k$ đỉnh thỏa mãn)

— Xét $2k + 2$ điểm phân biệt. Ta xét riêng $2k$ điểm và hai điểm A, B . Theo giả thiết quy nạp, từ $2k$ điểm trên ta có thể xây dựng được graph G' đầy đủ và có thể phân hoạch thành k đồ thị con $2k$ đỉnh liên thông. Bây giờ chúng ta xây dựng graph G đầy đủ $2k + 2$ đỉnh và có thể phân hoạch thành $k + 1$ graph con $2k + 2$ đỉnh liên thông.

- Bước 1: ta chia $2k$ điểm đã xét riêng thành hai nhóm : 1 và 2, mỗi nhóm có k điểm.
- Bước 2: Thêm các cạnh nối từ đỉnh A đến k điểm của nhóm 1 kèm theo cạnh AB . Khi đó mỗi graph con trong k graph con liên thông của G' sẽ sinh ra một graph con liên thông $2k + 2$ đỉnh.
- Bước 3: Thêm các cạnh nối từ đỉnh B đến k điểm của nhóm 2. Bước làm này bổ sung thêm một graph con $2k + 2$ đỉnh liên thông của nó bao gồm cạnh AB và các cạnh kẻ thêm ở bước 2. Cuối cùng kẻ các cạnh từ A đến các điểm nhóm 2, kẻ các cạnh từ B đến các điểm nhóm 1. Như vậy sẽ hoàn thành graph đầy đủ G có thể phân hoạch thành $k + 1$ graph con $2k + 2$ đỉnh liên thông.

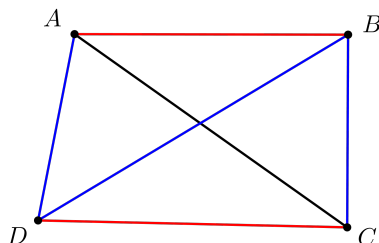
Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có mệnh đề đúng với mọi $n = 2k$.

- ② Với trường hợp $n = 2k + 1$, ta chỉ cần xét $2k + 1$ điểm phân biệt, xét riêng $2k$ điểm và điểm A , ta xây dựng được ngay một graph G' đầy đủ $2k$ đỉnh được phân hoạch thành k graph con $2k$ đỉnh liên thông. Ta chỉ cần bổ sung vào các graph con trên một trong các cạnh cạnh nối từ A đến $2k$ đỉnh đã xét riêng.

PHÂN TÍCH Ý TƯỞNG

Đây là bài toán VN TST ngày thứ nhất. Xem xét bài toán, ta có thể thấy ý tưởng về sử dụng lý thuyết graph (lý thuyết đồ thị) xuất hiện tương đối tự nhiên. Với các đối tượng là các thành phố (n thành phố), quan hệ giữa chúng là có đường bay hai chiều, điều này gợi ý cho chúng ta về một graph gồm n đỉnh là các thành phố, các cạnh chính là các đường bay giữa hai thành phố.

Tuy nhiên, để chuyển bài toán về bài toán graph, chúng ta cần khai thác toàn bộ **giả thuyết** của bài toán và chuyển chúng về giả thuyết của graph. Với giả thuyết "giữa hai thành phố bất kỳ có đường bay trực tiếp và mỗi đường bay chỉ được cấp phép cho một hãng hàng không duy nhất", ta thấy dấu hiệu của một **graph đầy đủ** nếu xét tổng thể các đường bay của tất cả các hãng hàng không được cấp phép. Hơn nữa giả thuyết "di chuyển bằng đường bay của một hãng hàng không tùy ý, người ta có thể đi từ một thành phố bất kỳ đến các thành phố còn lại" cho chúng ta thấy: graph đầy đủ n đỉnh của chúng ta đang thể hiện cho một "bản đồ" tất cả các đường bay của các hãng hàng không, tuy nhiên nếu ta chỉ xét các đường bay của một hãng hàng không thì sẽ nhận thấy đây là một **graph n đỉnh liên thông**. Để có một hình ảnh minh họa cụ thể, chúng ta nên xét bài toán với số liệu nhỏ, ví dụ $n = 4$ như sau đây:



Ta có thể thấy với 4 thành phố, hai loại đường bay (đỏ, xanh) của hai hãng hàng không thỏa mãn yêu cầu bài toán (xét tổng thể ta một graph đầy đủ có 4 đỉnh, xét riêng graph 4 đỉnh có các cạnh là màu đỏ hoặc xanh ta được những graph có 4 đỉnh liên thông.)

Câu hỏi của bài toán là "có thể cấp phép cho tối đa bao nhiêu hãng hàng không?" có thể hiểu theo ngôn ngữ graph là **có thể phân hoạch một graph đầy đủ n đỉnh thành tối đa bao nhiêu graph con liên thông n đỉnh?**. Như vậy chúng ta có thể chuyển bài toán đang xét về bài toán graph như sau:

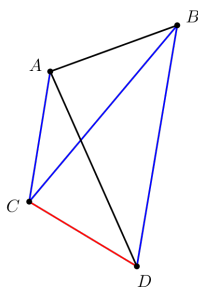
Có thể phân hoạch một graph đầy đủ n đỉnh thành tối đa bao nhiêu graph con liên thông n đỉnh?

Có thể thấy rằng một graph n đỉnh muốn có tính chất liên thông cần có ít nhất một số lượng cạnh nhất định, ví dụ như trên một graph có 4 đỉnh, ta không có cách nào làm nó trở thành graph liên thông chỉ với 2 cạnh, cần tối thiểu 3 cạnh. Từ đó ta có bổ đề.

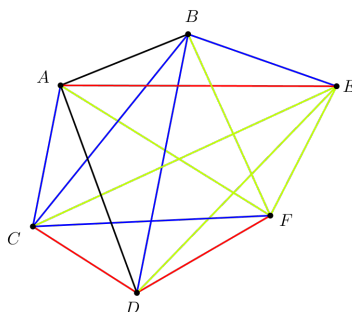
Bổ đề. Một đồ thị n đỉnh liên thông có ít nhất $n - 1$ cạnh ($n \geq 2$).

Chúng ta nêu ra một ví dụ cho việc xây dựng cho trường hợp $n = 6$ ($k = 3$) như sau:

— Bắt đầu với một graph đầy đủ 4 đỉnh thỏa mãn.

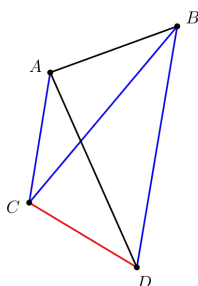


— Xét thêm hai điểm E, F nữa, chia 4 điểm A, B, C, D thành 2 nhóm A, B và C, D . Sau đó từ E kẻ các cạnh màu đỏ đến nhóm A , màu xanh đến B , từ F kẻ các cạnh màu xanh đến C , màu đỏ đến D . Kẻ cạnh EF màu vàng. Kẻ các cạnh màu vàng từ E đến C, D , từ F đến A, B . Ta sẽ xây dựng được graph đầy đủ G có 6 đỉnh thỏa mãn.

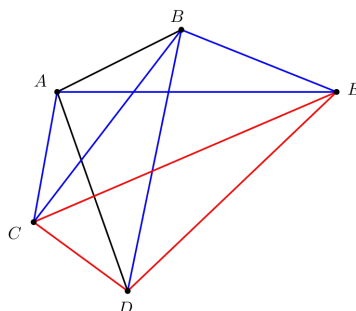


Chúng ta nêu ví dụ cho việc xây dựng cho trường hợp $n = 5, (k = 2)$.

— Bắt đầu với một graph đầy đủ 4 đỉnh thỏa mãn.



— Xét thêm đỉnh E . Vẽ các cạnh EA, EB màu xanh và EC, ED màu đỏ. Ta sẽ xây dựng được graph đầy đủ G có 5 đỉnh thỏa mãn.



□