

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ GIANG**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN NĂM 2022-2023
MÔN THI TOÁN HỌC**

Ngày thi: 15/06/2022

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x}) \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix}$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

b) Giải phương trình $2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 9 = 0$

Câu 3. (1,0 điểm)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x + y)(x - y) + x + 8y = 22$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (điểm H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt đường tròn (O) tại A và D. Gọi M là giao điểm của AC và BD, qua M vẽ đường thẳng vuông góc với BC tại N

a) Chứng minh rằng MNBA là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh rằng $2BH \cdot BO = AB^2$, từ đó tính giá trị của $P = 2 \left(\frac{BO}{AB} \right)^2 - \frac{OH}{BH}$

c) Từ B vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC, AN lần lượt tại K và E. Chứng minh rằng đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số dương a, b, c và $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng $\frac{ab}{a+2b} + \frac{bc}{b+2c} + \frac{ca}{c+2a} \leq 2$

ĐÁP ÁN

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x}) \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix}$

a) Rút gọn biểu thức B

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x}) \begin{pmatrix} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2 \cdot (\sqrt{x}-1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) \\ &= \frac{x+\sqrt{x}-2-x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \sqrt{x} = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

b) Tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên

$$B = \frac{2x}{x-1} = \frac{2x-2+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

$$B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2 : (x-1) \Leftrightarrow (x-1) \in \{\pm 1; \pm 2\} \Rightarrow x \in \{3; -1; 2; 0\}$$

Điều kiện suy ra $x \in \{3; 0; 2\}$

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Tìm m để phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2

sao cho $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

$$x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0 \text{ có } \Delta' = m^2 - (-2m - 6) = m^2 + 2m + 6 = (m+1)^2 + 5 > 0 \text{ (với mọi } m)$$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Áp dụng định lý Viet : } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -2m - 6 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 2(-2m - 6) = 4m^2 + 4m + 12$$

$$4m^2 + 4m + 12 = (2m+1)^2 + 11 \geq 11$$

$$\text{Vậy } \min(x_1^2 + x_2^2) = 11 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$\text{b) Giải phương trình } 2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x - 3} - 9 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x - 3} \ (t \geq 0) \Rightarrow x^2 - 2x = t^2 + 3. \text{ Phương trình thành :}$$

$$2(t^2 + 3) + t - 9 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (tm)} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{5} \\ t = -\frac{3}{2} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = 1 \pm \sqrt{5}$$

Câu 3. (1,0 điểm)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y) + x + 8y = 22$

$$(2x+y)(x-y) + x + 8y = 22 \Leftrightarrow 2x^2 - xy - y^2 + x + 8y - 15 = 7$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 2xy + 6x) + (xy - y^2 + 3y) - (5x - 5y + 15) = 7$$

$$\Leftrightarrow 2x(x-y+3) + y(x-y+3) - 5(x-y+3) = 7$$

$$\Leftrightarrow (x-y+3)(2x+y-5) = 7 = 1.7 = 7.1 = -1. -7 = -7. -1$$

$$* \begin{cases} x-y+3=1 \\ 2x+y-5=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \text{ (ktm)} \\ 2x+y-5=7 \end{cases} \quad * \begin{cases} x-y+3=7 \\ 2x+y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow y=-\frac{2}{3} \text{ (ktm)}$$

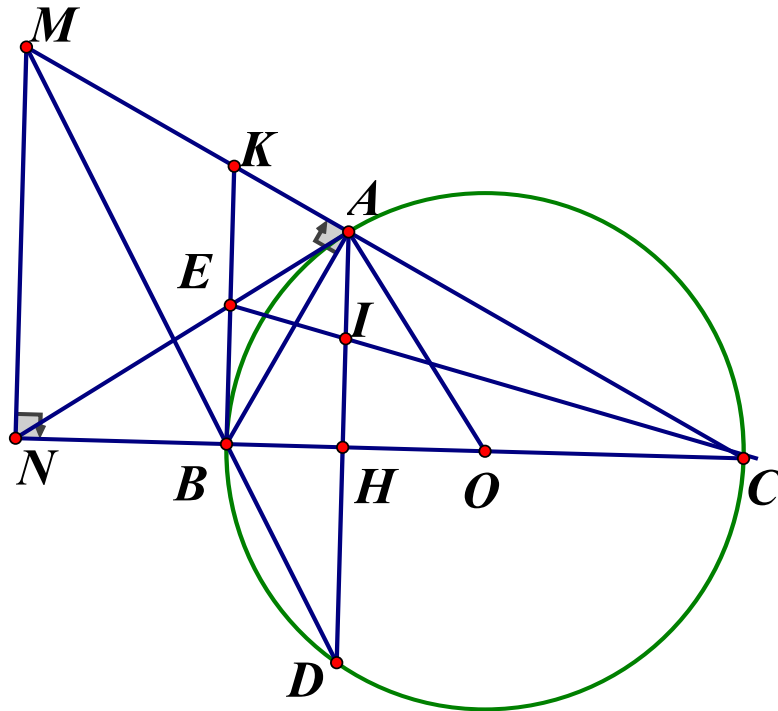
$$* \begin{cases} x-y+3=-1 \\ 2x+y-5=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases} \quad * \begin{cases} x-y+3=-7 \\ 2x+y-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases} \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm nguyên } (x; y) \in \{(-2; 2); (-2; 8)\}$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (điểm H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng

vuông góc với BC , cắt đường tròn (O) tại A và D . Gọi M là giao điểm của AC và BD , qua M vẽ đường thẳng vuông góc với BC tại N



a) Chứng minh rằng $MNBA$ là tứ giác nội tiếp

Ta có $\angle BAC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle BAM = 90^\circ$

Mặt khác $\angle MNB = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $MNBA$ có $\angle BAM + \angle MNB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Nên tứ giác $MNBA$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính MB

b) Chứng minh rằng $2BH \cdot BO = AB^2$, từ đó tính giá trị của $P = 2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH}$

Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A nên $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{AB^2}{2BO}$

$$OH = BO - BH = BO - \frac{AB^2}{2BO} = \frac{2BO^2 - AB^2}{2BO}$$

$$\frac{OH}{BH} = \frac{2BO^2 - AB^2}{AB^2} = 2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - 1$$

Vậy $P = 1$

c) Từ B vẽ tiếp tuyến với đường tròn (O) cắt hai đường thẳng AC, AN lần lượt tại K và E . Chứng minh rằng đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO

Ta thấy $\angle MBN = \angle DBC$ (đối đỉnh)

$\angle DBC = \angle DAC$ (tứ giác DBAC nội tiếp)

Suy ra $\angle MBN = \angle DAC = \angle NMB = \angle BCA$ (1)

Tứ giác $MNBA$ nội tiếp nên ta có $\angle NMB = \angle NAB$ (2)

Tam giác OAC cân tại O nên $\angle BCA = \angle OAC$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle NAB = \angle OAC \Rightarrow \angle OAC + \angle BAO = \angle NAB + \angle BAO \Leftrightarrow \angle BAC = \angle NAO$

Mà $\angle BAC = 90^\circ \Leftrightarrow \angle NAO = 90^\circ \Rightarrow NA$ là tiếp tuyến của (O)

Theo tính chất tiếp tuyến ta có : $EA = EB; \angle EAB = \angle EBA$

Trong tam giác vuông KAB , ta có $\angle EAB = \angle EBA \Rightarrow \angle BKA = \angle EAK$ (phụ với hai góc bằng nhau) $\Rightarrow \triangle KEA$ cân tại E $\Rightarrow AE = KE \Rightarrow EB = KE$

Mặt khác $AH \parallel BK$ (cùng vuông góc với AB)

$$AI \parallel KE \Rightarrow \frac{CI}{CE} = \frac{AI}{KE} [Ta - let], HI \parallel EB \Rightarrow \frac{CI}{CE} = \frac{HI}{BE} [Ta - let] \Rightarrow \frac{AI}{KE} = \frac{HI}{BE}$$

Mà $KE = EB \Rightarrow AI = HI \rightarrow I$ là trung điểm đoạn thẳng AH

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho ba số dương a, b, c và $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng $\frac{ab}{a+2b} + \frac{bc}{b+2c} + \frac{ca}{c+2a} \leq 2$

$$\frac{ab}{a+2b} + \frac{bc}{b+2c} + \frac{ca}{c+2a} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{a+2b}}{\frac{ab}{ab}} + \frac{\frac{1}{b+2c}}{\frac{bc}{bc}} + \frac{\frac{1}{c+2a}}{\frac{ca}{ca}} \leq 2 \text{ (do } a, b, c > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{2}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{2}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{2}{c}} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c}} \leq 2$$

Vì $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \geq \frac{9}{b+a+a}; \frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{c+b+b}; \frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+c+c}$ Nên

$$VT \leq \frac{1}{\overline{b+2a}} + \frac{1}{\overline{c+2b}} + \frac{1}{\overline{a+2c}} = \frac{1}{9}(b+2a+c+2b+a+2c) = \frac{1}{9}.3(a+b+c) = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$