

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN

(Thời gian làm bài 180 phút, không kể phát đề)

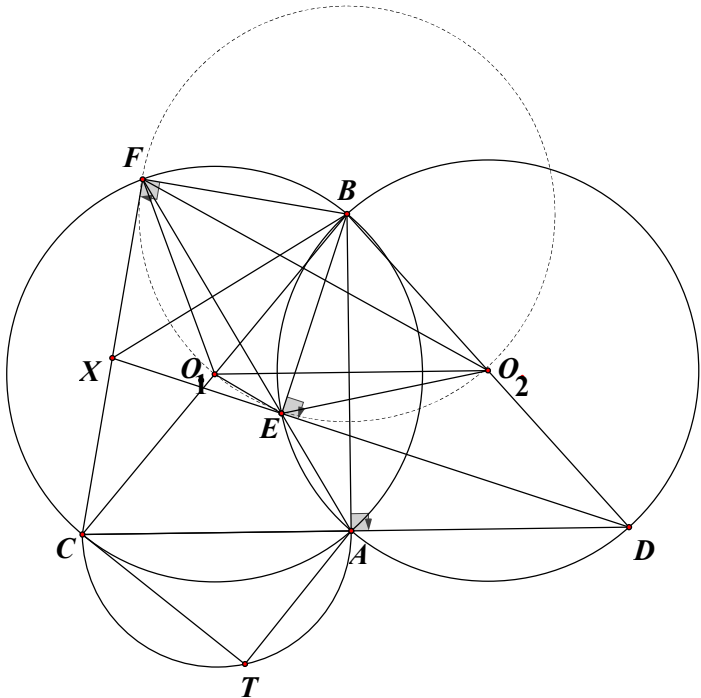
Ngày thi: 18/8/2024

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Bài	Đáp án	Điểm
5	a) Với a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} > \frac{3}{ab + bc + ca}.$	
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} \geq \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca} \quad (1)$ Ta có $c < a + b$ nên $c^2 < ac + bc$. Tương tự, ta có $a^2 < ab + ac$ và $b^2 < ab + bc$. Khi đó $a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2bc + 2ca$. Nên $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca < 3(ab + bc + ca)$ (2) Từ (1) và (2), suy ra $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} > \frac{3}{ab + bc + ca}$.	3,0
	b) Tìm tất cả các số thực a sao cho tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn $f(2024) = 2024$ và $a(f(x) - f(f(y))) \leq x - y \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$	
	Thay x bởi $f(y)$ vào (1), ta được $f(y) \geq y, \forall y \in \mathbb{R}$. Khi đó $f(f(x)) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (2).	0,5
	Khi $a = 0$, thì (1) trở thành $x - y \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (điều này vô lí)	0,5
	Khi $a < 0$, thay $x = y$ vào (1), ta được $a(f(x) - f(f(x))) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x) \geq f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$ (3). Từ (2) và (3), ta được $f(x) = f(f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Kết hợp với (1), ta được $a(f(x) - f(y)) \leq x - y, \forall x, y \in \mathbb{R}$ hay $af(x) - x \leq af(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}$. Đổi vai trò x, y trong đánh giá trên, ta được $af(x) - x = af(y) - y, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (4). Thay x bởi $f(x)$, y bởi $f(y)$ vào (4), ta được $af(f(x)) - f(x) = af(f(y)) - f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Hay $(a - 1)f(x) = (a - 1)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.	1,0

	Vì $a < 0$ nên $a - 1 \neq 0$, suy ra $f(x) = f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ hay f là hàm hằng. Thay vào đề thì $0 \leq x - y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (điều vô lý).	
	Do đó $a > 0$. Thay $y = 2024$ vào giả thiết thì $a(f(x) - 2024) \leq x - 2024$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mà $f(x) - 2024 \geq x - 2024$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $a(x - 2024) \leq x - 2024$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Điều này chỉ có thể xảy ra khi $a = 1$. Với $a = 1$, ta chọn $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ thì đánh giá ban đầu trở thành đẳng thức nên thỏa mãn. Vậy tất cả giá trị cần tìm là $a = 1$.	1,0
6	a) Có bao nhiêu cách chọn ra hai số phân biệt từ 2024 số nguyên dương đầu tiên sao cho hai số được chọn hơn kém nhau không quá 5 đơn vị?	
	Gọi hai số được chọn là $n, n + x$. Điều kiện: $\begin{cases} n, x \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq n < n + x \leq 2024 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n, x \in \mathbb{N}^* \\ 1 \leq n \leq 2024 - x \\ x \leq 5 \end{cases}$ Với mỗi giá trị $x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$ có đúng $2024 - x$ cách chọn n . Do đó, ta có số cách chọn là $\sum_{x=1}^5 (2024 - x) = 10105$.	2,0
	b) Một lớp học có 45 học sinh. Các học sinh tham gia vào tổng cộng m câu lạc bộ. Chứng minh rằng nếu mỗi câu lạc bộ có đúng 5 học sinh và hai học sinh bất kỳ tham gia chung nhiều nhất một câu lạc bộ thì $m \leq 99$.	
	Gọi S là số bộ $(\{A; B\}, C)$ mà trong đó học sinh A, B cùng tham gia vào câu lạc bộ C . Chọn câu lạc bộ trước, có m cách, chọn cặp học sinh cùng tham gia câu lạc bộ đó có $C_5^2 = 10$ cách nên $S = 10m$. Chọn cặp học sinh trước, có C_{45}^2 cách, chọn câu lạc bộ mà hai học sinh đó cùng tham gia, có không quá 1 cách nên $S \leq C_{45}^2$. Từ đó suy ra $10m \leq C_{45}^2 \Leftrightarrow m \leq 99$.	2,0
	c) Với số nguyên dương n ($n \geq 2$), xét tập hợp A gồm n số nguyên dương. Ký hiệu $f(A)$ là số các giá trị phân biệt tạo thành từ việc lấy tổng hai phần tử tùy ý của A . Chứng minh rằng $f(A) \geq 2n - 3$. Tìm tất cả các tập hợp A sao cho đẳng thức xảy ra.	
	Đặt $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ là các phần tử có trong A . Ta sắp thứ tự $x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_1 + x_4 < x_1 + x_5 < \dots < x_1 + x_n < x_2 + x_n < x_3 + x_n < \dots < x_{n-1} + x_n$. Khi đó, có tất cả $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$ tổng phân biệt có thể được tạo thành nên $f(A) \geq 2n - 3$.	1,0
	Ta lại xét các số $x_1 + x_2 < x_1 + x_3 < x_2 + x_3 < x_2 + x_4 < \dots < x_2 + x_{n-1} < x_3 + x_{n-1} < \dots < x_{n-2} + x_{n-1} < x_{n-1} + x_n$ Rõ ràng ở đây cũng có $2 + n - 2 + n - 3 = 2n - 3$ số nên để đẳng thức xảy ra, ta phải có hai dãy số ở trên là trùng nhau theo đúng thứ tự đó. Khi đó, ta có $x_1 + x_4 = x_2 + x_3 \Rightarrow x_2 - x_1 = x_4 - x_3$, $x_1 + x_5 = x_2 + x_4 \Rightarrow x_2 - x_1 = x_5 - x_4$.	1,0

	Cứ thế, suy ra $x_1 + x_k = x_2 + x_{k-1}, \forall k = 3, 4, \dots, n$ nên $x_k - x_{k-1} = x_2 - x_1 = d$. Cuối cùng, ta có $x_2 + x_n = x_3 + x_{n-1}$ nên $x_3 - x_2 = d$, suy ra các số của tập A lập thành cấp số cộng.	
	Kiểm tra lại, ta thấy rằng nếu có $A = \{a + md \mid 1 \leq m \leq n; m, d \in \mathbb{Z}^+\}$ thì tổng hai số trong A đều có dạng $2a + (i + j)d \text{ với } 1 \leq i < j \leq n.$ Chú ý các tổng $i + j$ có thể nhận được mọi giá trị từ 3 đến $2n - 3$ nên sẽ có tất cả $2n - 3$ tổng được tạo thành, thoả mãn đề bài. Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A là cấp số cộng.	1,0
7	Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cùng bán kính R, cắt nhau tại A, B và $O_1O_2 > R$. Đường thẳng qua A, vuông góc với AB, cắt lại $(O_1), (O_2)$ theo lần lượt tại C, D. Trên nửa mặt phẳng bờ CD chứa B, xét tia Ax tạo với tia AC góc 60° và tia Ax cắt (O_2) tại E, cắt (O_1) tại F. a) Chứng minh rằng O_1, O_2, E, F cùng thuộc một đường tròn, đồng thời DE, CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng qua B và vuông góc với Ax.	
		
	Vì $AB \perp CD$ nên dễ thấy B, C, O_1 và B, D, O_2 thẳng hàng. Ta có $\widehat{O_1BF} = \widehat{CBF} = \widehat{CAF} = 60^\circ$ nên ΔO_1BF đều, suy ra $BF = O_1B = R$. Ta cũng có $\widehat{BAE} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ nên $\widehat{BO_2E} = 2\widehat{BAE} = 60^\circ$ nên ΔO_2BF đều, suy ra $BE = O_2B = R$. Do đó $BO_1 = BO_2 = BE = BF = R$ nên O_1, O_2, E, F cùng thuộc đường tròn tâm B, bán kính R.	2,0
	Vì $AB \perp AD$ nên BD là đường kính của (O_2), Suy ra $BE \perp ED$. Vì thế DE tiếp xúc với đường tròn (B). Tương tự thì CF cũng tiếp xúc (B).	2,0

	Gọi X là giao điểm của DE, CF thì $XE = XF$. Mà $BE = BF$ nên $XB \perp EF$, tức là DE, CF cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng qua B và vuông góc với Ax.	
	b) Trên nửa đường tròn đường kính CA, khác phía với O_1, dựng T sao cho $CT = R$. Chứng minh rằng $O_1E + O_2F \geq 2TA$.	
	Vì $O_2E = O_1F = R$ nên O_1EO_2F là hình thang cân và $EF = O_1O_2$. Ngoài ra $BC = BD = 2R$ nên $\triangle BCD$ cân tại B và $AC = AD$. Do O_1O_2 là đường trung bình của $\triangle BCD$ nên $O_1O_2 = AC$.	2,0
	Theo định lý Ptolemy cho tứ giác O_1EO_2F thì $O_1E.O_2F = O_1O_2.EF - O_1F.O_2E = AC^2 - R^2 = AC^2 - CT^2 = TA^2.$ Theo bất đẳng thức AM-GM thì $\sqrt{O_1E.O_2F} \leq \frac{O_1E + O_2F}{2}$. Do đó $O_1E + O_2F \geq 2TA$.	1,0

----- Hết -----