

Câu 1 (1,5 điểm) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{x-4} + \frac{3\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8} \right) \left(\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{2\sqrt{x}} - 4 \right)$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
b) Đặt $B = A(x - \sqrt{x} + 1)$ với $x > 0, x \neq 1$. Chứng minh $B > 2$.

Câu 2 (2,5 điểm)

- a) Trên parabol $(P): y = \frac{x^2}{2}$, lấy hai điểm $A(-2; 2)$ và $B(4; 8)$. Xác định điểm C trên cung AB của (P) sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.
b) Cho $a > 7$ và phương trình $x^2 - \sqrt{a+1}x + 2 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 ; phương trình $x^2 - \sqrt{a+2}x + 2 = 0$ có 2 nghiệm x_3, x_4 . Tính giá trị biểu thức $P = (x_1 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 - x_3)(x_2 + x_4)$.

Câu 3 (2,5 điểm)

- a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 + 3x - 10} + \sqrt{2x - 3} = \sqrt{2x^2 - 7x + 6} + \sqrt{x + 5}$.
b) Cho 2 số thực x, y thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = y^3 - 28 \\ 3x^2 + 9x = y - y^2 \end{cases}$.

Hãy tính giá trị biểu thức $P = \frac{(x+1)^{2024} + (y-3)^{2025}}{(x+y)^{2024}}$.

Câu 4 (3,5 điểm) Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(I; r)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B (với $R \neq r$), O và I thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ là đường thẳng AB . Vẽ tiếp tuyến chung CD thuộc nửa mặt phẳng không chứa điểm A và có bờ là đường thẳng IO , trong đó $C \in (O), D \in (I)$. Từ C và D kẻ các đường thẳng lần lượt song song với AD, AC , chúng cắt nhau tại điểm E .

- a) Chứng minh tứ giác $BCED$ nội tiếp được đường tròn.
b) Chứng minh ba điểm A, B, E thẳng hàng; Diện tích tam giác ABC bằng diện tích tam giác ABD .
c) Tia CB cắt đường tròn (I) tại N . Chứng minh rằng AD là tia phân giác của góc $\widehat{CAN}$.
d) Chứng minh rằng: $BE < R + r$.

----- HẾT -----