

Câu 1. (3,0 điểm)

$$\text{Cho } a = \frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3} + \frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{9}$$

a) Chứng minh rằng: $9a^2 + 2\sqrt{3}a - \sqrt{3} = 0$

b) Tính giá trị biểu thức: $S = 3\sqrt{3}a^2 + \sqrt{27a^4 + 16a + 8}$

Câu 2. (3,0 điểm)

Cho biểu thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ thỏa mãn $P(1)=5$, $P(3)=13$, $P(5)=29$.

Tính giá trị của biểu thức $T = P(-4) + 21.P(6)$

Câu 3. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(1-2x)\sqrt{x^2+1} - 2x^3 - 7x - 1 = 0$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x+y)^2 + y^2 + x + 4y = 0 \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 2x + 13y \end{cases}$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leq 4$

Chứng minh rằng: $\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3$

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M là trung điểm của AB. Trên đoạn thẳng BC lấy điểm N (N khác B, NB < NC). Đường thẳng qua A song song với MN cắt DC tại H. Chứng minh $AB^2 = 2NB.DH$ và tính góc $\widehat{NOH}$.

Câu 6. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O;R) và điểm E cố định, biết $OE=a$ ($0 < a < R$). Qua E vẽ dây AB tùy ý không phải là đường kính của đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A và tại B cắt nhau ở M. Gọi K là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng OE.

a) Chứng minh rằng điểm K luôn cố định khi dây AB thay đổi.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác OAMB theo a và R.

Câu 7. (2,0 điểm)

Tìm các cặp số tự nhiên (m;n) thỏa mãn: $3^m - n^2 + 5n = 7$

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO – THÁI BÌNH (2020 – 2021)

Câu 1.

a) Ta có: $9a^2 + 2\sqrt{3}a - \sqrt{3} = \left(3a + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1+3\sqrt{3}}{3}$

Thay $a = \frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3} + \frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{9}$ ta được: $\left[3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sqrt{3} - \frac{1}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{3} = 0$

b) Theo a) ta có: $9a^2 + 2a\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{\sqrt{3} - 2a\sqrt{3}}{9} \Rightarrow a^4 = \frac{1 - 4a + 4a^2}{27}$

$\Rightarrow 27a^4 + 16a + 8 = 27 \cdot \frac{1 - 4a + 4a^2}{27} + 16a + 8 = (2a + 3)^2$

$\Rightarrow S = 3\sqrt{3}a^2 + \sqrt{27a^4 + 16a + 8} = 3\sqrt{3}a^2 + \sqrt{(2a + 3)^2} = \frac{(9a^2 + 2\sqrt{3}a - \sqrt{3}) + \sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$

Câu 2.

Xét đa thức $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ thỏa mãn $P(1)=5$, $P(3)=13$, $P(5)=29$.

Thay các giá trị tương ứng $f(1)=5$, $f(3)=13$, $f(5)=29$ ta tìm được: $A=1$, $B=0$, $C=4$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 4$

$\Rightarrow Q(x) = P(x) - f(x)$ là đa thức bậc 4 với hệ số cao nhất bằng 1 và nhận 1, 3, 5 làm nghiệm

$Q(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-m)$

$\Rightarrow P(4) = Q(-4) + f(-4) = -315(-4-m) + 20 = 1280 + 315m$

$21P(6) = 21Q(6) + 21f(6) = 2370 - 315m$

$\Rightarrow T = P(-4) + 21P(6) = 4010$

Câu 3.

a) $(1-2x)\sqrt{x^2+1} - 2x^3 - 7x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (1-2x)\sqrt{x^2+1} = 2x^3 + 7x + 1$

$\Leftrightarrow (1-2x)^2(x^2+1) = (2x^3 + 7x + 1)^2$

$\Leftrightarrow 48x^2 + 32x + 18x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3/4 \end{cases}$

Thay ngược lại phương trình ban đầu: $x=0$ (t/m), $x = -3/4$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm $x=0$

b) $\begin{cases} (x+y)^2 + y^2 + x + 4y = 0 \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 2x + 13y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + x + 4y = 0 \\ y(x+y)^2 = 2x^2 + 2x + 13y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x}{y} + 2x + 2y = -4 \\ (x+y)^2 = 2 \cdot \frac{x^2+x}{y} + 13 \end{cases}$

$$\text{Đặt } a = \frac{x^2 + x}{y}, b = x + y \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 4 \\ b^2 - 2a - 13 = 0 \end{cases} \Rightarrow (a; b) = (-2; 3) = (18; -7)$$

Với $(a; b) = (-2; 3)$. Thay số và rút ra vô nghiệm

Với $(a; b) = (18; -7)$. Thay số và rút ra vô nghiệm

Vậy hệ đã cho vô nghiệm

Câu 4.

Từ giả thiết ta suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 2$

Chú ý

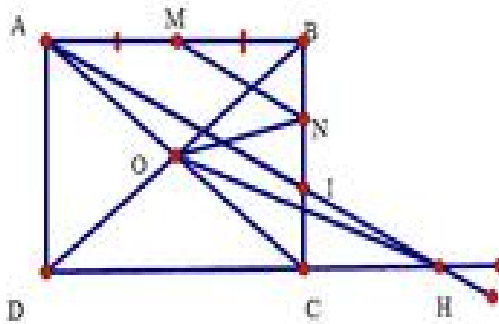
$$\begin{aligned} \frac{ab+1}{(a+b)^2} &= \frac{2ab+2}{2(a+b)^2} \geq \frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{2(a+b)^2} \\ &= \frac{(a+b)^2 + (b+c)(c+a)}{2(a+b)^2} = \frac{1}{2} + \frac{(b+c)(c+a)}{2(a+b)^2} \end{aligned}$$

Tương tự cho hai biểu thức còn lại suy ra

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2} + \frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2} + \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2} \right] \\ &\geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{(b+c)(c+a)}{(a+b)^2} \cdot \frac{(c+a)(a+b)}{(b+c)^2} \cdot \frac{(a+b)(b+c)}{(c+a)^2}} = 3 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 5.



$$\text{Ta có: } \triangle BMN \sim \triangle DHA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BM}{DH} = \frac{BN}{DA} \Rightarrow BM \cdot DA = BN \cdot DH \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DA = BN \cdot DH$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2NB \cdot DH$$

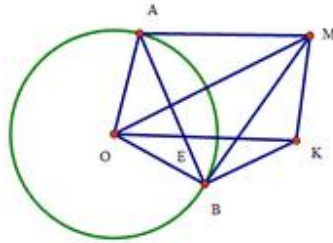
$$\text{Lại có: } \frac{NB}{AD} = \frac{MB}{HD} \Rightarrow NB \cdot HD = MB \cdot AD$$

$$\triangle AOD \sim \triangle OMB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{OB} = \frac{OD}{MB} \Rightarrow OD \cdot OB = AD \cdot MB$$

$$\Rightarrow NB \cdot HD = OB \cdot OD \Rightarrow \frac{NB}{OB} = \frac{OD}{HD}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \widehat{NBO} &= \widehat{ODH} = 45^\circ \\ \Rightarrow \Delta OHD &\sim \Delta NOB \text{ (c.g.c)} \\ \Rightarrow \widehat{NOB} &= \widehat{OHD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } \widehat{NOB} + \widehat{NOH} + \widehat{HOD} &= 180^\circ \\ \widehat{NOH} + \widehat{OHD} + \widehat{HOD} &= 180^\circ \\ \widehat{ODH} + \widehat{OHD} + \widehat{HOD} &= 180^\circ \\ \text{Suy ra: } \widehat{NOH} &= \widehat{ODH} = 45^\circ \\ \text{Vậy } \widehat{NOH} &= 45^\circ \\ \text{Câu 6.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{a) Có } \widehat{OKM} &= \widehat{OAM} = 90^\circ \Rightarrow \text{Tứ giác OAKM nội tiếp} \Rightarrow \widehat{AKO} = \widehat{AMO} \\ \text{Mà } \widehat{AMO} + \widehat{AOM} &= 90^\circ = \widehat{OAE} + \widehat{AOM} \Rightarrow \widehat{AMO} = \widehat{OAE} \\ \Rightarrow \widehat{OAE} &= \widehat{AKG} \\ \text{Dễ dàng chứng minh } \Delta OAE &\sim \Delta OKA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OE}{OA} = \frac{OA}{OK} \Rightarrow OE \cdot OK = R^2 \end{aligned}$$

Suy ra K cố định vì OE, R cố định.

$$\text{b) } S_{AOBM} = 2S_{AOM} = AO \cdot AM$$

$$S_{AOBM} \text{ min khi và chỉ khi } AM \text{ min. Mà } M = \sqrt{OM^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{AO^4}{OH^2} - AO^2} \text{ (vì } AO^2 = OH \cdot OM \text{)}$$

$$\text{Do đó } AM_{\min} \Leftrightarrow OH \text{ max} \Leftrightarrow OH = OE \Leftrightarrow H \equiv E$$

$$\Rightarrow AM_{\min} = \sqrt{\frac{AO^4}{OE^2} - AO^2} = \sqrt{\frac{R^4}{a^2} - R^2}$$

$$\Rightarrow S_{AOBM} = R \sqrt{\frac{R^4}{a^2} - R^2}$$