

ĐỀ THI CHÍNH THỨC  
Câu 1. (3,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức  $P = \frac{x-4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2+3}$  với  $0 \leq x \neq 4$

b) Giải phương trình  $\sqrt{x^2+3} = x + \sqrt{2x-1}$

c) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x-y+2=xy \\ (2-x)y=x^2+y^2 \end{cases}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Cho đa thức  $P(x) = (x-2)(x^2+ax-8) + bx^2$  với  $a$  và  $b$  là các số thực thỏa mãn  $a+b < 1$ . Chứng minh rằng phương trình  $P(x) = 0$  có bốn nghiệm phân biệt

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên  $(x; y)$  thỏa mãn  $x(x+y)^2 - y + 1 = 0$

Câu 3. (1,0 điểm) Với các số thực dương  $a$  và  $b$  thay đổi, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :  $S = (a+b) \left( \frac{1}{\sqrt{a^2-ab+2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2-ab+2a^2}} \right)$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn  $(O)$  đường kính  $AB$ . Từ điểm  $S$  thuộc tia đối của tia  $AB$  kẻ đến  $(O)$  hai tiếp tuyến  $SC$  và  $SD$  ( $C, D$  là hai tiếp điểm). Gọi  $H$  là giao điểm của đường kính  $AB$  và dây  $CD$ . Vẽ đường tròn  $(O')$  đi qua  $C$  và tiếp xúc với đường thẳng  $AB$  tại  $S$ . Hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  cắt nhau tại điểm  $M$  khác  $C$

a) Chứng minh tứ giác  $SMHD$  nội tiếp

b) Gọi  $K$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên  $BD$ ,  $I$  là giao điểm của  $BM$  và  $CK$ . Chứng minh  $HI$  song song với  $BD$

c) Các đường thẳng  $SM$  và  $HM$  lần lượt cắt  $(O)$  tại các điểm  $L$  và  $T$  ( $L, T$  khác  $M$ ).

Chứng minh rằng tứ giác  $CDTL$  là hình vuông khi và chỉ khi  $MC^2 = MS \cdot MD$

Câu 5. (1,0 điểm) Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn và có trực tâm  $H$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là chân ba đường cao kẻ từ  $A, B, C$  của tam giác  $ABC$ . Biết

$$\left( \frac{AB}{HF} \right)^2 + \left( \frac{BC}{HD} \right)^2 + \left( \frac{CA}{HE} \right)^2 = 36. \text{ Hãy chứng minh rằng } \Delta ABC \text{ đều.}$$

## ĐÁP ÁN

### Câu 1.

$$a) x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2); \quad x\sqrt{x}-8=(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)$$

$$\text{Rút gọn được: } \frac{x-4}{x\sqrt{x}-8} = \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+4}$$

$$\Rightarrow P = \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+4} + \frac{x+\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+4} = 1$$

b) Điều kiện:  $x \geq \frac{1}{2}$ . Ta có:

$$\sqrt{x^2+3} = x + \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x^2+3 = x^2+2x-1+2x\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2x-1} = 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ x^2(2x-1) = (2-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1(tm)$$

Vậy  $x=1$

$$c) \begin{cases} x-y+2=xy & (1) \\ (2-x)y=x^2+y^2 & (2) \end{cases} \Rightarrow (x+y)^2 - (x+y) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2+3x+3=0(VN) \\ x+y=2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

Hệ có một nghiệm  $(0;2)$

### Câu 2.

$$a) \text{ Ta có } P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+4)(x^2+ax-8)+bx^2=0(1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2x-8)(x^2+ax-8)+bx^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{8}{x}+2\right)\left(x-\frac{8}{x}+a\right)+b=0$$

(Vì  $x=0$  không là nghiệm)

Đặt  $t = x - \frac{8}{x} \Leftrightarrow x^2 - tx - 8 = 0(*)$ , phương trình  $(*)$  luôn có hai nghiệm  $x$  phân biệt

với mọi  $t \in \mathbb{R}$ . Ta có phương trình  $(1)$  trở thành:  $t^2 + (a+2)t + 2a+b = 0(2)$

$$\text{Ta có: } \Delta = (a+2)^2 - 4(2a+b) = (a-2)^2 - 4b > (a-2)^2 - 4(1-a) = a^2 \geq 0$$

Suy ra (2) có hai nghiệm phân biệt nên (1) có bốn nghiệm phân biệt (đpcm)

$$b) \quad x(x+y)^2 - y + 1 = 0 \Leftrightarrow x[(x+y)^2 + 1] = x + y - 1 \Leftrightarrow x = \frac{x+y-1}{(x+y)^2 + 1}$$

$$\text{Đặt } t = x + y \Rightarrow t \in \mathbb{R} \text{ \& } x = \frac{t-1}{t^2+1}$$

$$\text{Do } x \in \mathbb{R} \Rightarrow (t-1):(t^2+1)$$

$$\Rightarrow (t+1)(t-1):(t^2+1) \Rightarrow 2:(t^2+1) \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=\pm 1 \end{cases}$$

$$t=0 \Rightarrow x=-1; y=1$$

$$t=1 \Rightarrow x=0, y=1$$

$$t=-1 \Rightarrow x=-1, y=0$$

Vậy phương trình có ba nghiệm  $(-1;1);(0;1);(-1;0)$

### Câu 3.

Theo bất đẳng thức Bunhia copxki ta có:

$$S^2 \leq 4(a^2 + b^2) \left( \frac{1}{a^2 - ab + 2b^2} + \frac{1}{b^2 - ab + 2a^2} \right) = 4 \left( \frac{1}{1 + \frac{b(b-a)}{a^2 + b^2}} + \frac{1}{1 + \frac{a(a-b)}{a^2 + b^2}} \right)$$

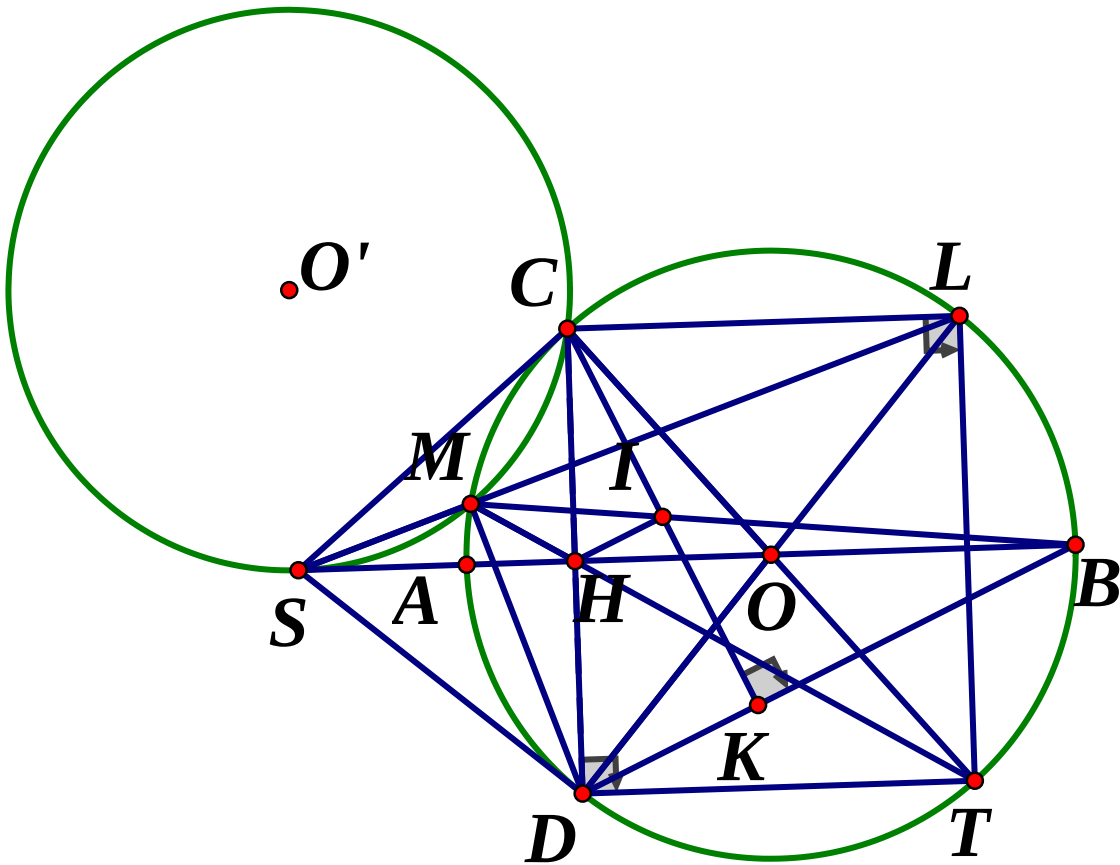
$$\text{Đặt } x = \frac{b(b-a)}{a^2 + b^2}, y = \frac{a(a-b)}{a^2 + b^2}$$

$$\text{Ta có: } x + y = \frac{(a-b)^2}{a^2 + b^2}; 2xy = -\frac{2ab(a-b)^2}{(a^2 + b^2)^2} \Rightarrow x + y + 2xy = \frac{(a-b)^4}{(a^2 + b^2)^2} \geq 0$$

$$\text{Suy ra: } S^2 \leq 4 \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \right) = 4 \left( \frac{2+x+y}{1+x+y+xy} \right) \leq 4 \left( \frac{2+x+y}{1+x+y-\frac{x+y}{2}} \right) = 8 \Rightarrow S \leq 2\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow a=b$ . Vậy  $\text{Max} S = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a=b$

Câu 4.



a) Ta có:  $\angle MSH = \angle SCM$  và  $\angle SCM = \angle MDC$  (góc giữa tiếp tuyến và dây cung)  
 $\Rightarrow \angle MSH = \angle MDH \Rightarrow SMHD$  nội tiếp

b) **Chứng minh**  $HI \parallel BD$

$\angle CIM = \angle BIK$  (đối đỉnh)  $= 90^\circ - \angle DBM = 90^\circ - \angle MCD$  (tam giác vuông và góc nội tiếp);

$\angle CHM = 90^\circ - \angle SHM = 90^\circ - \angle MDS$  (tam giác vuông, góc giữa tiếp tuyến và dây cung) mà  $MCD = MDS$  (góc giữa tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \angle CIM = \angle CHM \Rightarrow CMHI$  là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle CHI = \angle CMI = \angle CDB$  (góc nội tiếp). Vậy  $HI \parallel BD$  (hai góc đồng vị)

c)  $BD \perp CK \Rightarrow HI \perp CK \Rightarrow CMT = 90^\circ \Rightarrow CT$  là đường kính của  $(O)$

$\angle DML = 90^\circ \Rightarrow DL$  cũng là đường kính của  $(O)$ . Vậy  $CDTL$  là hình chữ nhật

Từ đó ta có  $MS.SL = SD^2$ ;  $MD.SL = SD.DL$ ;  $MC.SL = SC.CL$

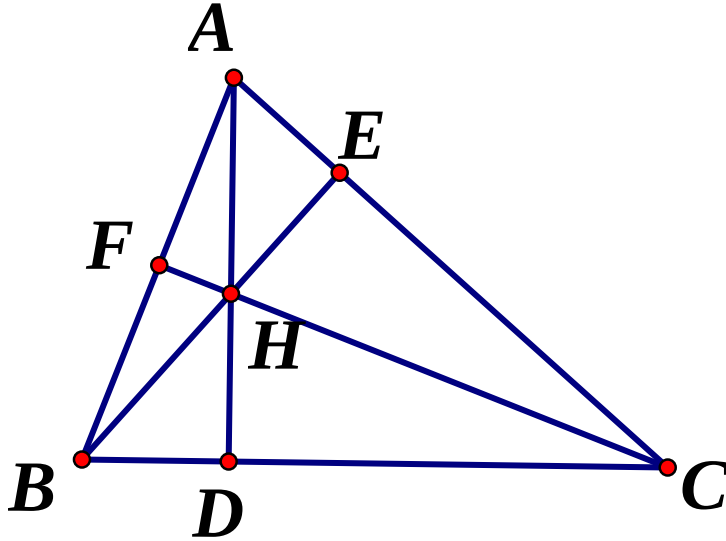
Vậy  $MC^2 = MS.MD \Leftrightarrow CL^2 = SD.2R$  ( $R$  là bán kính của  $(O)$ )

$$\Leftrightarrow 2 \left( \frac{R^2}{OS} \right)^2 = R \sqrt{OS^2 - R^2} \Leftrightarrow OS = R\sqrt{2} \quad (1)$$

Mặt khác  $CDTL$  là hình vuông  $\Leftrightarrow \angle SOC = 45^\circ \Leftrightarrow SO = R\sqrt{2}$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm

**Câu 5.**



Ta có:  $\triangle ACD \sim \triangle BHD$  và  $\triangle ABD \sim \triangle AHF \Rightarrow \frac{AC}{BH} = \frac{AD}{DB} = \frac{AF}{FH}$  (1)

Tương tự:  $\triangle BCE \sim \triangle AHE$  và  $\triangle ABE \sim \triangle HFB \Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{BE}{AE} = \frac{FB}{FH}$  (2)

Từ (1) và (2) ta có:  $\frac{AB}{FH} = \frac{AF + FB}{HF} = \frac{AF}{HF} + \frac{FB}{FH} = \frac{AC}{BH} + \frac{CB}{AH}$

$$\left(\frac{AB}{HF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BH} + \frac{CB}{AH}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{AC \cdot CB}{BH \cdot AH} \quad (3)$$

Lại có  $\triangle BCF \sim \triangle HAF \Rightarrow \frac{BC}{AH} = \frac{CF}{AF}$ , từ (1) và (3)

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{HF}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{CF}{HF} = 4 \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{HAB}} \quad (4)$$

Tương tự  $\left(\frac{BC}{HD}\right)^2 \geq 4 \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{HBC}} \quad (5); \left(\frac{AC}{HE}\right)^2 = 4 \cdot \frac{S_{ABC}}{S_{HAC}} \quad (6)$

Do đó:

$$\left(\frac{AB}{HF}\right)^2 + \left(\frac{BC}{HD}\right)^2 + \left(\frac{CA}{HE}\right)^2 \geq 4.S_{ABC} \left( \frac{1}{S_{HAB}} + \frac{1}{S_{HBC}} + \frac{1}{S_{HCA}} \right)$$

$$\geq \frac{36.S_{ABC}}{S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA}} = 36$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow S_{HAB} = S_{HBC} = S_{HAC} \Leftrightarrow H$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ , mà  $H$  là trực tâm  $\Delta ABC$  nên  $\Delta ABC$  đều (khi đó các bất đẳng thức (4),(5),(6) cùng xảy ra đẳng thức)