

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Số báo danh

.....

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 28/9/2023

(Đề thi có 3 bài, gồm 01 trang)

Bài 5 (7,0 điểm).

- a) Cho m, n là hai số nguyên dương lẻ với $m > n > 1$ thỏa mãn $n^2 - 1$ chia hết cho $m^2 - n^2 + 1$. Biết rằng $m^2 - n^2 + 1$ chia hết cho 39, chứng minh $m^2 - n^2 + 1$ chia hết cho 39^2 .
- b) Cho p là một số nguyên tố, $p > 2$ và các số nguyên $a_1; a_2; \dots; a_p$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có công sai không chia hết cho p . Chứng minh rằng tồn tại một chỉ số k thuộc tập $\{1; 2; \dots; p\}$ sao cho $a_1 a_2 \dots a_p + a_k$ chia hết cho p^2 .

Bài 6 (7,0 điểm). Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực và có bậc $n > 2$.

- a) Biết phương trình $P(P(x)) = x$ có n^2 nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng phương trình $P(x) = x$ có n nghiệm thực phân biệt.
- b) Biết phương trình $P(P(P(x))) = P(x)$ có n^3 nghiệm thực phân biệt. Chứng minh n^3 nghiệm này có thể phân thành ba nhóm phân biệt có trung bình cộng bằng nhau.

Bài 7 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và có cạnh BC nhỏ nhất. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , P là điểm đối xứng của A qua đường thẳng OH . Giả sử P không nằm trên nửa mặt phẳng chứa A bờ là BC . Lấy các điểm E, F lần lượt trên các cạnh AB, AC sao cho $BE = PC, CF = PB$. Gọi K là giao điểm của AP và OH , gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và EF .

- a) Chứng minh rằng đường thẳng IJ song song với đường thẳng AP .
- b) Tính số đo góc $\widehat{EKF}$.

HẾT

(Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay khi làm bài)