

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG TRỊ**

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

Khóa ngày 21 tháng 7 năm 2020

Môn thi : TOÁN

(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán)

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 = 2y + 3 \\ y^2 = 2x + 3 \end{cases}$$
2. Giải phương trình: $x^2 + 3 - (x + 3)\sqrt{x^2 + 3} + 2(x + 1) = 0$

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Cho các parabol $(P_1): y = mx^2, (P_2): y = nx^2 (m \neq n)$. Lấy các điểm A, B thuộc (P_1) và C, D thuộc (P_2) sao cho $ABCD$ là hình vuông nhận Oy làm trục đối xứng. Tính diện tích hình vuông $ABCD$
2. Cho a, b, c là ba số thực phân biệt thỏa mãn $\frac{a^3 + 1}{a} = \frac{b^3 + 1}{b} = \frac{c^3 + 1}{c}$. Chứng minh rằng $abc + 1 = 0$

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $3a^2 + 3b^2 + 8c^2 = 32$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca$

Câu 4. (2,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên n để $n^2 + 2020$ là số chính phương
2. Chứng minh rằng có thể chọn 3 số a_1, a_2, a_3 , trong 7 số nguyên tố phân biệt bất kỳ sao cho $P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$ chia hết cho 216.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là điểm chính giữa cung AB không chứa C và I là điểm trên đoạn MC sao cho $MI = MA$

- 1) Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC
- 2) Vẽ đường tròn (O') tiếp xúc với (O) tại D và tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại E, F .
 - a) Chứng minh ba điểm M, E, D thẳng hàng
 - b) Chứng minh tứ giác $DIFC$ nội tiếp

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$1) \text{ Hệ } \Rightarrow x^2 - y^2 = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 2) = 0$$

$$*) x = y \Rightarrow x^2 = 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -1 \\ x = y = 3 \end{cases}$$

$$*) y = -x - 2 \Rightarrow x^2 = 2(-x - 2) + 3 \Rightarrow x = y = -1$$

Vậy hệ có 2 nghiệm $(-1; -1); (3; 3)$

$$2) \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2 + 3} \ (t > 0), \text{ Ta được :}$$

$$t^2 - (x + 3)t + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = x + 1 \end{cases}$$

$$*) t = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$*) t = x + 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy $x = \pm 1$

Câu 2.

1) Gọi $A(a, ma^2)$. Khi đó do Oy là trục đối xứng của hình vuông nên

$B(-a; ma^2)$. Do $DA \parallel BC \parallel Oy$ nên $C(-a, na^2), D(a, na^2)$

$$AB = 2|a|; AD = |m - n|a^2; AB = AD \Rightarrow |a| = \frac{2}{|m - n|}$$

$$\text{Diện tích hình vuông } ABCD \text{ là } S = AB^2 = \frac{16}{(m - n)^2}$$

$$2) \text{ Đặt } \frac{a^3 + 1}{a} = \frac{b^3 + 1}{b} = \frac{c^3 + 1}{c} = m. \text{ Ta có: } \begin{cases} a^3 - ma + 1 = 0 \\ b^3 - mb + 1 = 0 \\ c^3 - mc + 1 = 0 \end{cases} \text{ nên } a, b, c \text{ là 3 nghiệm}$$

$$\text{của đa thức } f(x) = x^3 - mx + 1 = 0$$

$$\text{Do } f(x) \text{ có 3 nghiệm } a, b, c \text{ nên } f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

$$\text{Từ đó suy ra } x^3 - mx + 1 = (x - a)(x - b)(x - c), \forall x \in \mathbb{C}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số 2 vế ta được: } -abc = 1 \Leftrightarrow abc + 1 = 0 \text{ (đpcm)}$$

Câu 3. Ta có:

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}; bc \leq \frac{b^2 + 4c^2}{4}; ca \leq \frac{a^2 + 4c^2}{4}$$

Cộng theo về các bất đẳng thức trên ta có:

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{4}(3a^2 + 3b^2 + 8c^2) = 8$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 2c = 2$

Vậy $\text{Max } P = 8 \Leftrightarrow a = b = 2, c = 1$

Câu 4.

1) Gọi m là số nguyên dương sao cho $m^2 = n^2 + 2020$

Khi đó $(m+n)(m-n) = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$

Ta có: $(m+n) + (m-n) = 2m$ và $m+n > m-n$ nên

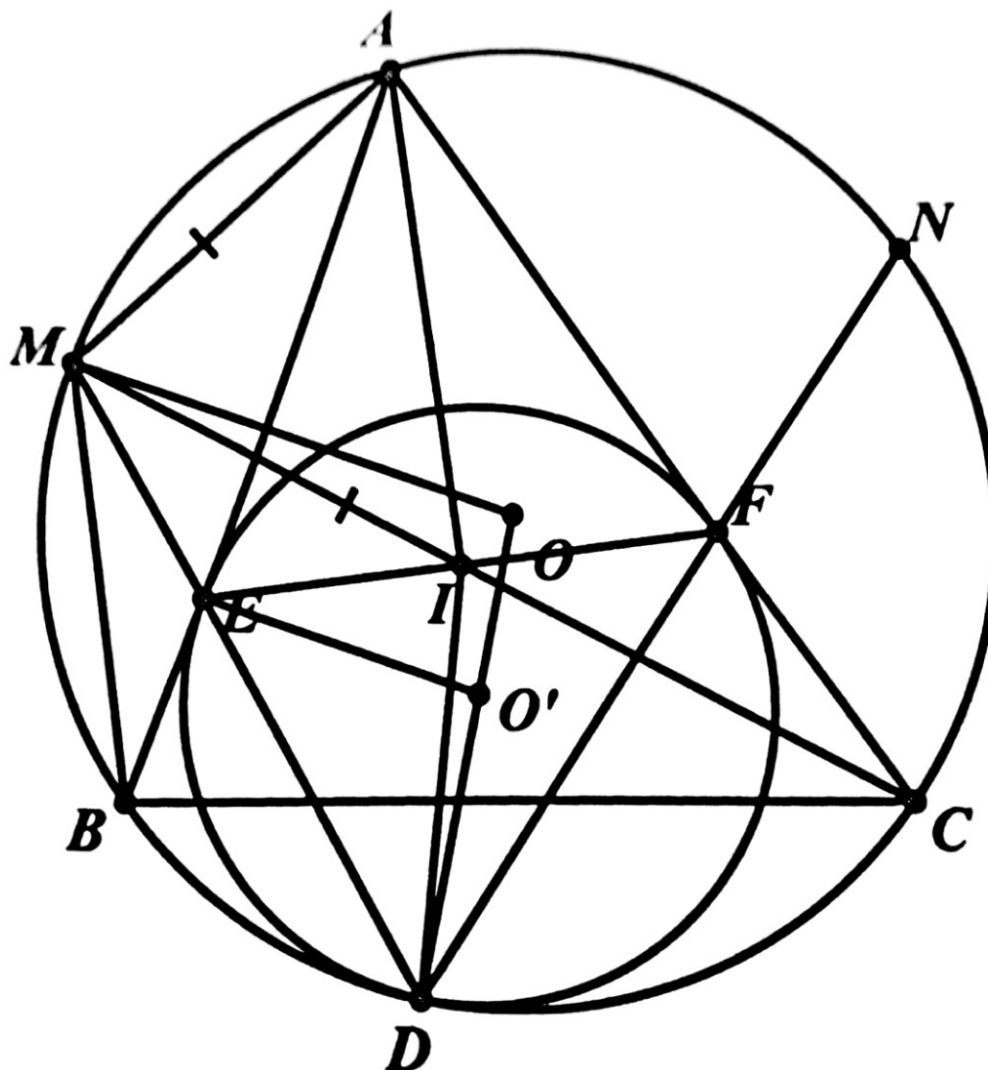
$$\left[\begin{cases} m+n=202 \\ m-n=10 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m=106 \\ n=96 \end{cases} \right. \right. \\ \left[\begin{cases} m+n=1010 \\ m-n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} m=506 \\ n=504 \end{cases} \right. \right.$$

Vậy $n^2 + 2020$ là số chính phương khi $n = 96$ hoặc $n = 504$

2) Trong 7 số nguyên tố phân biệt, có ít nhất 5 số lớn hơn 3. Chọn 5 số lớn hơn 3 đó, các số trong 5 số này chia cho 3 có số dư là 1 hoặc 2. Như thế có ít nhất 3 số khi chia cho 3 có cùng số dư. Chọn ra 3 số a_1, a_2, a_3

Khi đó các hiệu $a_i - a_j \vdots 6$. Vậy $P \vdots 216$

Câu 5.



1) Ta có: $MA = MI$ nên $\angle MAI = \angle MIA$

Mặt khác $\angle MAI = \angle MAB + \angle BAI$; $\angle MIA = \angle MCA + \angle IAC$

Mà $\angle MAB = \angle MCA$ nên $\angle BAI = \angle IAC$

Suy ra AI, CI là các phân giác trong tam giác ABC nên I là tâm đường tròn nội tiếp

2) a) Ta có: D, O, O' thẳng hàng và $OM \perp O'E$ vì cùng vuông góc AB nên

$$\angle MOD = \angle EO'D$$

Do đó $2\angle ODM = 2\angle ODE \Rightarrow \angle ODM = \angle ODE \Rightarrow M, E, D$ là 3 điểm thẳng hàng.

b) Từ đó suy ra $\angle EIM + \angle MIN + \angle NIF = \angle MDN + \angle MIN = 180^\circ$. Do đó, E, I, F thẳng hàng.

Khi đó, $\widehat{ICD} = \frac{1}{2} \widehat{MOD} = \frac{1}{2} \widehat{EO'D} = \angle EFD = \angle IFD$

Suy ra tứ giác $IFCD$ nội tiếp.