

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

MÔN THI: TOÁN (chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Ngày thi: 21/7/2020.

Bài 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{3\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2}$ ($x \geq 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Hãy so sánh giá trị của biểu thức A với $\frac{5}{2}$.

Bài 2 (1,0 điểm). Tìm tất cả các cặp số thực (m, n) sao cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(1 - x_1)(1 - x_2) = -2$, đồng thời phương trình $2x^2 + nx + m = 0$ có hai nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn $(2 - x_3)(2 - x_4) = \frac{3}{2}$.

Bài 3 (1,0 điểm). Giải phương trình:

$$x^2 + 2\sqrt{x-1} - 2x\sqrt{2-x} + 1 = 0.$$

Bài 4 (1,0 điểm). Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho ab là ước của $a^2 + b$.

Bài 5 (1,5 điểm). Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , có $\angle ABC = 120^\circ$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Trên các cạnh AB, AD , tương ứng lấy các điểm E, F không trùng với các đỉnh của hình thoi đã cho, sao cho $\angle EOF = 60^\circ$. Hãy tính tích $BE \cdot DF$ theo a .

Bài 6 (2,5 điểm). Cho tam giác ABC ($AB \leq AC$). Lấy điểm P nằm trong tam giác đó sao cho $AP < AB$. Đường tròn tâm A bán kính AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm phân biệt M, N (M khác phía với C đối với đường thẳng AB). Đường thẳng MN cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại L, K .

a) Chứng minh rằng tứ giác $BLKC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng tam giác ABP đồng dạng với tam giác APL .

Bài 7 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + 1}{c^2 a^2} + \frac{b^2 + 1}{a^2 b^2} + \frac{c^2 + 1}{b^2 c^2} \geq a(b + 1) + b(c + 1) + c(a + 1).$$

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh : Số báo danh:

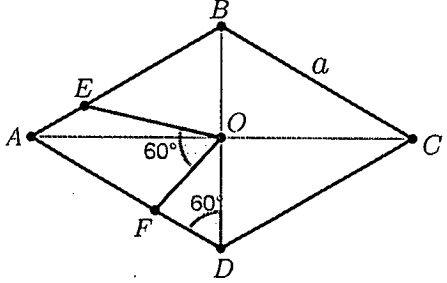
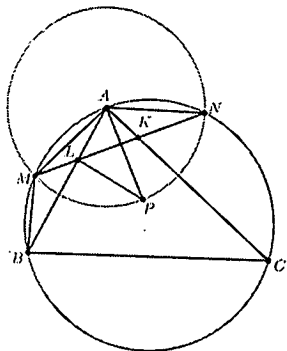
HƯỚNG DẪN CHẤM THI - ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN (chuyên)

(Văn bản gồm có 05 trang)

Bài	Nội dung	Điểm
1 (2,0đ)	Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} + \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ ($x \geq 0, x \neq 1$).	
	a) (1 điểm). Rút gọn biểu thức A.	
	Ta có: $x + \sqrt{x} - 2 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)$.	0,25
	Do đó: $A = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$= \frac{x-4+x-1+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2x+3\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$= \frac{(2\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2}$.	0,25
	b) (1 điểm). Hãy so sánh giá trị của biểu thức A với $\frac{5}{2}$.	
	Ta có: $A - \frac{5}{2} = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+2} - \frac{5}{2} = \frac{4\sqrt{x}+10-5\sqrt{x}-10}{2(\sqrt{x}+2)} = \frac{-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)}$.	0,50
	Với mọi $x \geq 0, x \neq 1$, do $-\sqrt{x} \leq 0$ và $2(\sqrt{x}+2) > 0$ nên $A - \frac{5}{2} = \frac{-\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+2)} \leq 0$.	0,25
	Do đó, $A \leq \frac{5}{2}$.	0,25
2 (1,0đ)	Tìm tất cả các cặp số thực (m, n) sao cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(1-x_1)(1-x_2) = -2$, đồng thời phương trình $2x^2 + nx + m = 0$ có hai nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn $(2-x_3)(2-x_4) = \frac{3}{2}$.	
	Với giả thiết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + mx + n = 0$, và x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $2x^2 + nx + m = 0$, theo định lý Viet, ta có: $(1-x_1)(1-x_2) = 1 - (x_1+x_2) + x_1x_2 = 1 + m + n$,	0,25

Bài	Nội dung	Điểm
	$(2 - x_3)(2 - x_4) = 4 - 2(x_3 + x_4) + x_3x_4 = 4 + n + \frac{m}{2} = \frac{8 + m + 2n}{2}.$	0,25
	Do đó, (m, n) là cặp số thực thỏa mãn yêu cầu đề bài khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 4n \geq 0 \\ 1 + m + n = -2 \\ \Delta_2 = n^2 - 8m \geq 0 \\ \frac{8 + m + 2n}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \geq 4n \\ m + n = -3 \\ n^2 \geq 8m \\ m + 2n = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -2. \end{cases}$ Vậy, có duy nhất cặp số thực (m, n) thỏa mãn yêu cầu đề bài, là $(-1, -2)$.	0,25
3 (1,0đ)	Giải phương trình: $x^2 + 2\sqrt{x-1} - 2x\sqrt{2-x} + 1 = 0$.	
	Điều kiện: $1 \leq x \leq 2$. (1) Với điều kiện đó, ta có: $x^2 + 2\sqrt{x-1} - 2x\sqrt{2-x} + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 2x\sqrt{2-x} + 2 - x) + (x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1) = 1$	0,25
	$\Leftrightarrow (x - \sqrt{2-x})^2 + (\sqrt{x-1} + 1)^2 = 1. \quad (2)$	0,25
	Vì $(x - \sqrt{2-x})^2 \geq 0$ và $(\sqrt{x-1} + 1)^2 \geq 1$ với mọi $x \in [1; 2]$ nên $(x - \sqrt{2-x})^2 + (\sqrt{x-1} + 1)^2 \geq 1.$	0,25
	Do đó $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{2-x})^2 = 0 \\ (\sqrt{x-1} + 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2-x} \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$ Vì $x = 1$ thỏa mãn điều kiện (1) nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.	0,25
4 (1,0đ)	Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho ab là ước của $a^2 + b$.	
	Giả sử (a, b) là một cặp số nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta có: $(a^2 + b) : ab$. (1) Do đó, $b : a$ và $a^2 : b$.	0,25
	Suy ra, tồn tại số nguyên dương k sao cho $b = ak$, và $a^2 : ak$. Vì $b = ak$ nên, theo (1), ta có: $(a^2 + ak) : a^2k$. Suy ra, $(a^2k + ak^2) : a^2k$; do đó, $ak^2 : a^2k$. Vì thế, $k : a$. (2)	0,25
	Mặt khác, vì $a^2 : ak$ nên $a : k$. Kết hợp với (2), ta được $k = a$; do đó, $b = a^2$. (3) Thay (3) vào (1) ta được $2a^2 : a^3$; suy ra, $2 : a$. Vì thế, $a = 1$ hoặc $a = 2$.	0,25

Bài	Nội dung	Điểm
	Với $a = 1$, ta có $b = 1$. Với $a = 2$, ta có $b = 4$.	
	Ngược lại, bằng cách thử trực tiếp, ta thấy các cặp $(1, 1)$ và $(2, 4)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy có tất cả hai cặp số nguyên dương (a, b) thỏa mãn là: $(1, 1)$ và $(2, 4)$.	0,25
5 (1,5đ)	Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a , có $\angle ABC = 120^\circ$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Trên các cạnh AB, AD , tương ứng lấy các điểm E, F không trùng với các đỉnh của hình thoi đã cho, sao cho $\angle EOF = 60^\circ$. Hãy tính tích $BE \cdot DF$ theo a .	
		
	Vì $ABCD$ là hình thoi và $\angle ABC = 120^\circ$ nên $\angle OAB = 30^\circ, \angle FDO = \angle ADO = 60^\circ$, và $AC \perp BD$. (1)	0,25
	Ta có: $\angle FOE + \angle EOB = \angle FOB = \angle FDO + \angle OFD$. Mà $\angle FOE = \angle FDO$ (vì cùng bằng 60°), nên $\angle EOB = \angle OFD$. (2)	0,25
	Lại có: $\angle EBO = \angle ODF$ (vì cùng bằng 60°). (3) Từ (2) và (3), suy ra hai tam giác $\triangle BOE, \triangle DFO$ đồng dạng.	0,50
	Do đó, $\frac{BO}{DF} = \frac{BE}{DO}$. Suy ra, $DF \cdot BE = BO \cdot DO = BO^2$. (4)	0,25
6 (2,5đ)	Do tam giác AOB vuông tại O và có $\angle OAB = 30^\circ$ (theo (1)) nên $BO = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}.$ (5) Từ (4) và (5), ta được: $BE \cdot DF = \frac{a^2}{4}$.	0,25
	Cho tam giác ABC ($AB \leq AC$). Lấy điểm P nằm trong tam giác đó sao cho $AP < AB$. Đường tròn tâm A bán kính AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại hai điểm phân biệt M, N (M khác phía với C đối với đường thẳng AB). Đường thẳng MN cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại L, K .	
6 (2,5đ)	a) (1 điểm). Chứng minh rằng tứ giác $BLKC$ là tứ giác nội tiếp.	
		

Bài	Nội dung	Điểm
7 (1,0đ)	Ta có $\angle BLM = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BM} + \text{sđ}\widehat{AN})$ (góc có đỉnh ở trong đường tròn).	0,25
	Vì M, N thuộc đường tròn tâm A nên $AM = AN$. Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta có $\widehat{MA} = \widehat{AN}$.	0,25
	Do đó, $\angle BLM = \frac{1}{2}(\text{sđ}\widehat{BM} + \text{sđ}\widehat{MA}) = \frac{1}{2}\text{sđ}\widehat{BA} = \angle ACB = \angle KCB.$	0,25
	Do đó, $\angle BLK + \angle KCB = \angle BLK + \angle BLM = 180^\circ$. Vì vậy, $BLKC$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	b) (1,5 điểm). Chứng minh rằng tam giác ABP đồng dạng với tam giác APL .	
	Nối L với P . Xét hai tam giác AMB và ALM , ta có: • $\angle A$ chung; • $\angle ABM = \angle AMN = \angle AML$. Do đó, $\triangle AMB$ và $\triangle ALM$ đồng dạng.	0,50
	Suy ra, $\frac{AM}{AL} = \frac{AB}{AM}$. Vì thế, $AL \cdot AB = AM^2 = AP^2$.	0,50
7 (1,0đ)	Suy ra, $\frac{AB}{AP} = \frac{AP}{AL}$.	0,25
	Mặt khác, vì $\angle BAP = \angle PAL$ nên $\triangle ABP$ và $\triangle APL$ đồng dạng.	0,25
	Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng, ta luôn có bất đẳng thức sau: $\frac{a^2 + 1}{c^2 a^2} + \frac{b^2 + 1}{a^2 b^2} + \frac{c^2 + 1}{b^2 c^2} \geq a(b + 1) + b(c + 1) + c(a + 1).$	
	• Trước hết, ta chứng minh kết quả sau: “Với x, y, z là ba số thực tùy ý, thỏa mãn $xyz = 1$, ta có: $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.” \quad (1)$	0,25
	Chứng minh. Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy = \frac{2}{z}$. (2) Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được: $y^2 + z^2 \geq \frac{2}{x}, \quad (3)$ $z^2 + x^2 \geq \frac{2}{y}. \quad (4)$ Cộng các bất đẳng thức (2), (3), (4), vế theo vế, rồi chia cả hai vế của bất đẳng thức thu được cho 2, ta được bất đẳng thức (1).	0,25
	• Trở lại bài toán. Vì $abc = 1$ nên ta có: $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{ab} \cdot \frac{1}{bc} \cdot \frac{1}{ca} = 1.$	0,25

Bài	Nội dung	Điểm
	Vì thế, lần lượt áp dụng bất đẳng thức (1) cho các bộ ba số thực $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$, $\left(\frac{1}{ab}, \frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}\right)$, ta thu được các bất đẳng thức sau: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a + b + c, \quad (5)$ $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \geq ab + bc + ca. \quad (6)$	
	Cộng các bất đẳng thức (5) và (6), vế theo vế, ta được bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.	0,25

HẾT

PHỤ LỤC

Lời giải khác cho bài 2.

2 (1,0đ)	Tìm tất cả các cặp số thực (m, n) sao cho phương trình $x^2 + mx + n = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $(1 - x_1)(1 - x_2) = -2$, đồng thời phương trình $2x^2 + nx + m = 0$ có hai nghiệm x_3, x_4 thỏa mãn $(2 - x_3)(2 - x_4) = \frac{3}{2}$.	
	Giả sử (m, n) là một cặp số thực thỏa mãn yêu cầu của bài toán. Đặt $f(x) = x^2 + mx + n$ và $g(x) = 2x^2 + nx + m$. Từ giả thiết, ta có: $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \text{ và } g(x) = 2(x - x_3)(x - x_4).$	0,25
	Do đó: $(1 - x_1)(1 - x_2) = -2 \Leftrightarrow f(1) = -2 \Leftrightarrow m + n = -3. \quad (1)$ $(2 - x_3)(2 - x_4) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}g(2) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2n + m = -5. \quad (2)$	0,25
	Từ (1) và (2), suy ra $m = -1$ và $n = -2$.	0,25
	Ngược lại, với $m = -1$ và $n = -2$, dễ dàng kiểm tra được các phương trình đã cho đều có hai nghiệm phân biệt và các nghiệm thỏa mãn các hệ thức tương ứng. Vậy có duy nhất cặp số thực (m, n) thỏa mãn bài toán là $(-1; -2)$.	0,25