

Bài 1. 1) Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \frac{\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}}$

2) Chứng minh rằng tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

Bài 2. a) Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x} = 4x^2 - 12x + 7$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{2023+x^2})(y + \sqrt{2023+y^2}) = 2023 \\ 5x^2 + 7y^2 - 15xy = 27 \end{cases}$$

Bài 3. a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^4 - y^4 = 3y^2 + 1$

b) Cho hai phương trình $x^2 - 3mx + 2n = 0$ và $x^2 - 5nx + 4m = 0$ với m, n là các số thực. Chứng minh rằng nếu $2m + n \leq 0$ thì ít nhất một trong hai phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Bài 4. Cho đường tròn (O; R) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) sao cho $OA = 3R$. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường tròn (O) tại D, AD cắt đường tròn (O) tại E. Gọi M là giao điểm của BC và AO.

a) Chứng minh rằng $AE \cdot AD = AM \cdot AO$

b) Tia BE cắt AC tại F. Chứng minh rằng F là trung điểm của AC.

c) Tính diện tích tam giác BDC theo R.

Bài 5. a) Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \leq 1$

Chứng minh rằng $abcd \leq \frac{1}{81}$

b) Trong một hộp có 2014 viên kẹo. Có hai người tham gia trò chơi, mỗi người lần lượt phải bốc ít nhất là 11 viên kẹo và nhiều nhất là 20 viên kẹo. Người nào bốc viên kẹo cuối cùng sẽ thua cuộc. Hãy tìm thuật chơi để đảm bảo người bốc đầu tiên luôn là người thắng cuộc.