

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HẢI DƯƠNG ĐỀ THI CHÍNH THỨC (Đề thi có 01 trang)	KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI NĂM HỌC 2024- 2025 Môn: Toán (Chuyên) Ngày thi: 03/06/2024 Thời gian làm bài: 150 phút, không tính thời gian phát đề
--	--

Câu 1. (2,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \left[\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} \right] \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} - 1$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.
Tìm các giá trị của x sao cho $A < \frac{-1}{7}$.

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$. Tính giá trị biểu thức
 $P = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2024$

Câu 2. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y \end{cases}^{2^2-2}$
2. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Chứng minh rằng:
 $\frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2} \geq \frac{-3}{2}$

Câu 3. (2,0 điểm)

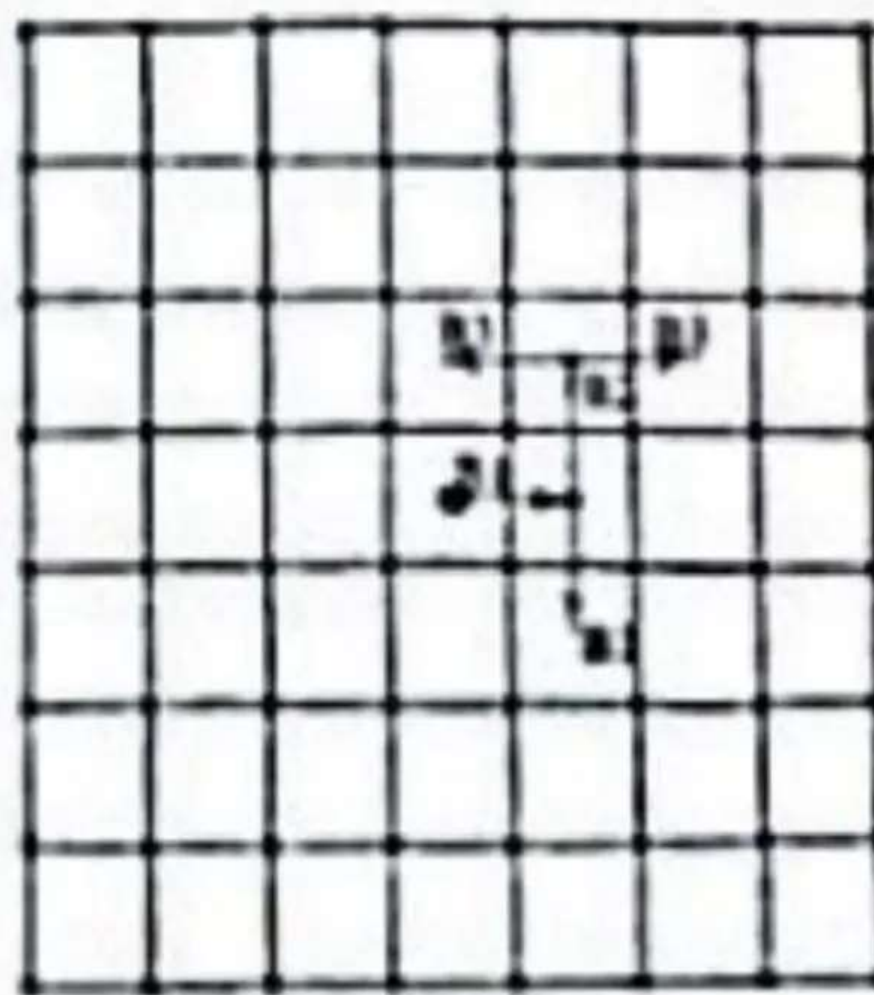
1. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x^2-x-1)(y^2+xy-9)=2x+1$.
2. Cho số nguyên tố lẻ p và số nguyên dương a thỏa mãn: a^p-1 chia hết cho p^3 . Chứng minh rằng $a-1$ chia hết cho p^2 .

Câu 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định trên (O) , các điểm B, C thay đổi trên (O) sao cho B, C không trùng A và $AC < BC$. Điểm M trên đoạn BC sao cho $MAC = ABC$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BI cắt AC tại D . Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAC .

1. Chứng minh rằng hai tam giác CJM và CIA đồng dạng.
2. Gọi P là giao điểm khác I của đường thẳng CI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AID , đường thẳng PM cắt đường thẳng JD tại N . Chứng minh rằng bốn điểm N, M, J, C thuộc một đường tròn.
3. Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC . Chứng minh khi B, C thay đổi trên (O) thì T luôn thuộc một đường cố định.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho bảng vuông 7×7 gồm 49 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 con robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ, theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với ô vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chuyển tiếp theo hướng đó sang tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế (một ví dụ về cách di chuyển của một con robot như hình vẽ). Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot như thế nào thì vẫn luôn có một thời điểm mà có hai con robot ở chung một ô vuông.



-----Hết-----

Lời giải đề thi tuyển sinh vào 10 chuyên toán Nguyễn Trãi năm 2024-2025

Câu 1: (2 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \left[\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} \right] \cdot \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} - 1$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$. Tìm các giá trị của x sao cho $A < \frac{-1}{7}$.

2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+2\sqrt{abc}=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sqrt{a(1-b)(1-c)} + \sqrt{b(1-c)(1-a)} + \sqrt{c(1-a)(1-b)} - \sqrt{abc} + 2024.$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Ta có: } A &= \left[\frac{2x-1+\sqrt{x}}{1-x} + \frac{2x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} \right] \cdot \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} - 1 \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{(x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}-1} - 1 \\ &= \left[\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \right] \cdot (x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) - 1 \\ &= \frac{x-\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-x}{(1-\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)} \cdot (x-\sqrt{x})(1-\sqrt{x}) - 1 = \frac{x-\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} - 1 = \frac{-1}{x-\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A < \frac{-1}{7} \Leftrightarrow \frac{-1}{x-\sqrt{x}+1} < \frac{-1}{7} \Leftrightarrow \frac{1}{x-\sqrt{x}+1} > \frac{1}{7} \Leftrightarrow x-\sqrt{x}+1 < 7 \Leftrightarrow x-\sqrt{x}-6 < 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow x < 9.$$

Kết hợp với DKXD ta kết luận các giá trị của x thỏa mãn là $0 \leq x < 9, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

$$2. \text{ Ta có: } a(1-b)(1-c) = a(1-b-c+bc) = a \cdot (a+2\sqrt{abc}+bc) = a^2 + 2a \cdot \sqrt{abc} + abc.$$

$$\Rightarrow a(1-b)(1-c) = (a+\sqrt{abc})^2 \Rightarrow \sqrt{a(1-b)(1-c)} = a + \sqrt{abc}.$$

Tương tự ta có: $\sqrt{b(1-c)(1-a)} = b + \sqrt{abc}$ và $\sqrt{c(1-a)(1-b)} = c + \sqrt{abc}.$

Khi đó $P = a + b + c + 3\sqrt{abc} - \sqrt{abc} + 2021 = a + b + c + 2\sqrt{abc} + 2024 = 2025.$

Vậy $P = 2025.$

Câu 2: (2 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y \end{cases}$$

2. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2} \geq \frac{-3}{2}$$

Lời giải:

1. Ta có DKXD: $x \geq 1$, khi đó $(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y$

$$\Leftrightarrow (x+1-y)[(x+1)^2 - y(x+1) + y^2 + 1] = 0$$

Do $(x+1)^2 - y(x+1) + y^2 + 1 > 0$ nên $x+1-y=0$ hay $y=x+1$.

Thay vào (2) ta được: $4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)(x+1)$

$$\Leftrightarrow 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = 4x^2 + 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-1} = 4x^2 - x - 8 \Leftrightarrow 6\sqrt{x-1} - 6 = 4x^2 - x - 14$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = (x-2)(4x+7) \Leftrightarrow (x-2)\left(4x+7 - \frac{6}{\sqrt{x-1}+1}\right) = 0$$

Mà $x \geq 1$ nên $4x+7 \geq 11 > 6 > \frac{6}{\sqrt{x-1}+1}$ nên $4x+7 - \frac{6}{\sqrt{x-1}+1} > 0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=3.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2, 3).$

2. Công từng số hạng bên vế trái của bất đẳng thức với 1 ta thu được bất đẳng thức mới như sau:

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(y+1)^2}{y^2+2} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \geq \frac{3}{2}$$

Theo nguyên lí Dirichlet trong 3 số x, y, z luôn tồn tại 2 số cùng dấu. Ta có thể giả sử 2 số đó là y và z .

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $\frac{(y+1)^2}{y^2+2} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \geq \frac{(y+z+2)^2}{y^2+z^2+4}$.

Do $yz \geq 0$ nên $y^2 + z^2 + 4 \leq y^2 + 2yz + z^2 + 4 = (y+z)^2 + 4 \Rightarrow \frac{(y+z+2)^2}{y^2+z^2+4} \geq \frac{(y+z+2)^2}{(y+z)^2+4}$.

Khi đó ta chỉ cần chứng minh: $\frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(y+z+2)^2}{(y+z)^2+4} \geq \frac{3}{2}$.

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(2-x)^2}{x^2+4} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x^2+4} \geq \frac{3}{2} - \frac{(x+1)^2}{x^2+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x^2+4} \geq \frac{(x-2)^2}{2(x^2+2)} \Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2(x^2+2)} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2 x^2}{(x^2+1)(x^2+2)} \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ hoặc $(x, y, z) = (2, -1, -1)$ và các hoán vị của nó.

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 3: (2 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$.
2. Cho số nguyên tố lẻ p và số nguyên dương a thỏa mãn: $a^p - 1 \vdots p^3$. Chứng minh rằng $a - 1 \vdots p^2$.

Lời giải:

$$1. \text{ Xét } x=1 \Rightarrow -(y^2 + y - 9) = 3 \Rightarrow (y-2)(y+3) = 0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow (x, y) = (1, 2).$$

Xét $x \geq 2$, nếu $y \geq 3$ thì ta có $2x+1 = (x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) \geq 1 \cdot 9 + 3y - 9 = 3x \Rightarrow x \leq 1$ (vô lí).

Do đó $y \leq 2 \Rightarrow y \in \{1, 2\}$. Ta xét hai trường hợp như sau:

$$\text{TH}_1 : \text{ Với } y=1 \Rightarrow (x^2 - x - 1)(x-8) = 2x+1 \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 5x - 7 = 0.$$

Nếu phương trình trên có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước nguyên dương của 7.

Nhưng dễ thấy 1 và 7 đều không là nghiệm của phương trình trên nên trường hợp này vô nghiệm.

$$\text{TH}_2 : \text{ Với } y=2 \Rightarrow (x^2 - x - 1)(2x-5) = 2x+1 \Rightarrow 2x^3 - 7x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(2x^2 - 3x - 4) = 0.$$

Dễ thấy phương trình $2x^2 - 3x - 4 = 0$ không có nghiệm nguyên dương nên ta thu được $x=1$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất $(x, y) = (1, 2)$.

2. Trước hết ta sẽ chỉ ra $a - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Thật vậy giả sử phân chứng $a - 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Khi đó $\left| \frac{a^p - 1}{a - 1} = a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1 \right|$. Mặt khác do $p \mid a^p - 1$ nên $(a, p) = 1$.

Theo định lý Fermat, ta có $p \mid a^{p-1} - 1$, kết hợp với $a - 1 \not\equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p \nmid \frac{a^{p-1} - 1}{a - 1} = a^{p-2} + \dots + a + 1$.

Thay vào (2) ta được: $4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)(x+1)$

$$\Leftrightarrow 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = 4x^2 + 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x-1} = 4x^2 - x - 8 \Leftrightarrow 6\sqrt{x-1} - 6 = 4x^2 - x - 14$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = (x-2)(4x+7) \Leftrightarrow (x-2) \left(4x+7 - \frac{6}{\sqrt{x-1}+1} \right) = 0$$

Mà $x \geq 1$ nên $4x+7 \geq 11 > 6 > \frac{6}{\sqrt{x-1}+1}$ nên $4x+7 - \frac{6}{\sqrt{x-1}+1} > 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2, 3)$.

2. Cộng từng số hạng bên vế trái của bất đẳng thức với một ta thu được bất đẳng thức mới như sau

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(y+1)^2}{y^2+2} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \geq \frac{3}{2}$$

Theo nguyên lý Dirichlet Trong ba số x, y, z luôn tồn tại hai số cùng dấu. Ta có thể giả sử hai số đó là y và z

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có: $\frac{(y+1)^2}{y^2+2} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \geq \frac{(y+z+2)^2}{y^2+z^2+4}$.

Do $yz \geq 0$ nên $y^2 + z^2 + 4 \leq y^2 + 2yz + z^2 + 4 = (y+z)^2 + 4 \Rightarrow \frac{(y+z+2)^2}{y^2+z^2+4} \geq \frac{(y+z+2)^2}{(y+z)^2+4}$.

Khi đó ta cần đi chứng minh: $\frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(y+z+2)^2}{(y+z)^2+4} \geq \frac{3}{2}$.

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(2-x)^2}{x^2+4} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x^2+4} \geq \frac{3}{2} - \frac{(x+1)^2}{x^2+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x^2+4} \geq \frac{(x-2)^2}{2(x^2+2)} \Leftrightarrow (x-2)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{2(x^2+2)} \right) \geq 0$$

Error! Objects cannot be created from editing field codes. (luôn đúng)

Dấu bằng xảy ra khi $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ hoặc $(x, y, z) = (2, -1, -1)$ và các hoán vị của nó.

Ta có đpcm

Câu 3: (2 điểm)

1. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$.

2. Cho ba số nguyên tố lẻ p và số nguyên dương a thỏa mãn $a^p - 1 \vdots p^3$. Chứng minh rằng $a - 1 \vdots p^2$.

Lời giải:

1. Xét $x = 1 \Rightarrow -(y^2 + y - 9) = 3 \Rightarrow (y - 2)(y + 3) = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (x, y) = (1, 2)$.

Xét $x \geq 2$, nếu $y \geq 3$ thì ta có $2x + 1 = (x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) \geq 1 \cdot (9 + 3y - 9) = 3y \Rightarrow x \leq 1$ (vô lí).

Do đó $y \leq 2 \Rightarrow y \in \{1, 2\}$. Ta xét hai trường hợp nhỏ sau:

TH₁ : Với $y = 1 \Rightarrow (x^2 - x - 1)(x - 8) = 2x + 1 \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 5x - 7 = 0$.

Nếu phương trình trên có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước nguyên dương của 7

Nhưng dễ thấy một và bảy đều không là nghiệm của phương trình trên nên trường hợp này vô nghiệm.

TH 2 : Với $y = 2 \Rightarrow (x^2 - x - 1)(2x - 5) = 2x + 1 \Rightarrow 2x^3 - 7x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(2x^2 - 3x - 4) = 0$.

Dễ thấy phương trình $2x^2 - 3x - 4 = 0$ không có nghiệm nguyên dương nên ta thu được $x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất $(x, y) = (1, 2)$.

2. Trước hết ta sẽ chỉ ra $a - 1 \vdots p$. Thật vậy giả sử phản chứng $a - 1$ không chia hết cho p .

Khi đó $\left| \frac{a^p - 1}{a - 1} = a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1 \right|$. Mặt khác do $p \mid a^p - 1$ nên $(a, p) = 1$.

Theo định lí Fermat, ta có $p \mid a^{p-1} - 1$, kết hợp với $a - 1$ không chia hết cho $p \Rightarrow p \mid \frac{a^{p-1} - 1}{a - 1} = a^{p-2} + \dots + a + 1$.

Do đó $p \mid a^{p-1}$, điều này vô lí do $(a, p) = 1$. Suy ra $a - 1 \vdots p$.

Giả sử $a - 1$ không chia hết p^2 , khi đó $a - 1 = kp$ với k là số nguyên dương thỏa mãn $(k, p) = 1$.

Ta có $a^p - 1$ **không chia hết cho** p mà $a - 1 \vdots p$ nhưng $a - 1$ không chia hết cho $p^2 \Rightarrow p^2 \mid \frac{a^p - 1}{a - 1} = a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1$.

Với mỗi số tự nhiên, theo khai triển Newton có:

$$a' = (kp + 1)' = (kp)' + i \cdot (kp)^{i-1} + \dots + \frac{i(i-1)}{2} \cdot (kp)^2 + i \cdot kp + 1 \equiv i \cdot kp + 1 \pmod{p^2}$$

Áp dụng với $i = 0, 1, \dots, p-1$ rồi cộng vế ta thu được:

$$a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1 \equiv (1 + 2 + \dots + p-1) \cdot kp + p = \frac{p(p-1)}{2} \cdot kp + p \equiv p \pmod{p^2}$$

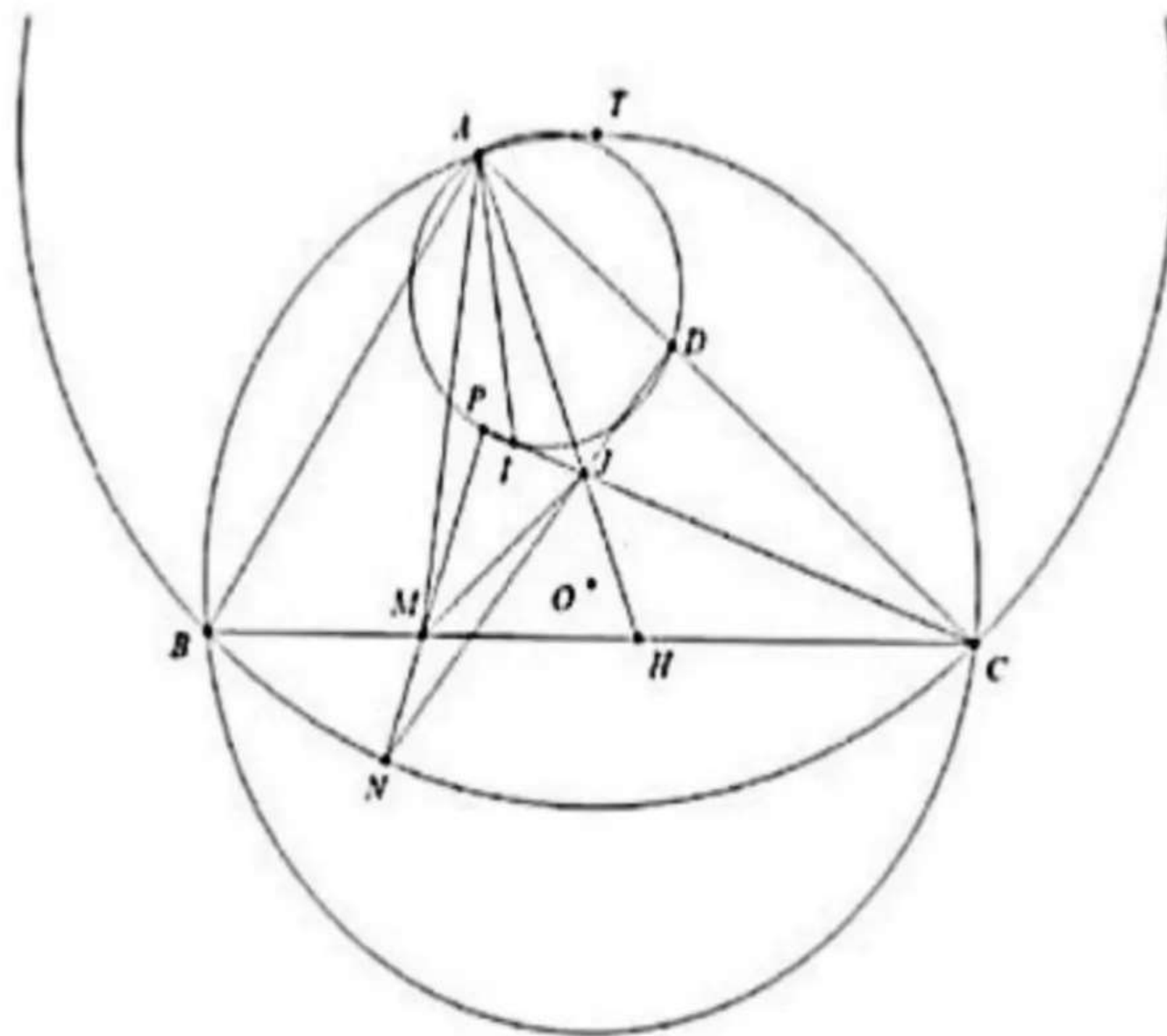
Suy ra $a^{p-1} + a^{p-2} + \dots + a + 1$ không chia hết cho p^2 điều này mâu thuẫn

Do đó giả sử là sai nên $p^2 \mid a-1$. Ta có đpcm

Câu 4: (3 điểm) Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định trên (O) , các điểm B, C thay đổi trên (O) sao cho B, C không trùng A và $AC < BC$. Điểm M trên đoạn BC sao cho góc $MAC =$ góc ABC . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BH cắt AC tại D . Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAC .

- Chứng minh rằng hai tam giác CJM và CIA đồng dạng
- Gọi P là giao điểm khác Y của đường thẳng CI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AID , đường thẳng PM cắt đường thẳng JD tại N . Chứng minh rằng bốn điểm N, M, J, C thuộc một đường tròn.
- Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC . Chứng minh khi B, C thay đổi trên (O) thì T luôn thuộc một đường tròn cố định

Lời giải:



- Từ giả thiết ta có $MAC = ABC$ và $ACM = BCA \Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle ABC$ (g.g).

Lại có J, I lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAC, \triangle ABC \Rightarrow \triangle CJM \sim \triangle CAI$.

- Do $\triangle CIA \sim \triangle CJM$ nên $\frac{CM}{CJ} = \frac{CA}{CI}$. Mà tứ giác $AJPD$ nội tiếp nên $CI \cdot CP = CD \cdot CA \Rightarrow \frac{CP}{CD} = \frac{CA}{CI}$.

Do đó $\frac{CM}{CJ} = \frac{CP}{CD}$, lại có $\angle MCP = \angle CDD \Rightarrow \triangle MCP \sim \triangle JCD$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle CPM = \angle CDJ$.

Suy ra tứ giác $NCDP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle PWD = \angle PCD = \angle MCJ \Rightarrow$ bốn điểm N, M, J, C đồng viên.

- Kéo dài AJ cắt BC tại H và gọi T là điểm chính giữa cung BAC .

Ta có: $HAD = \frac{1}{2}ABC = HBD \Rightarrow$ tứ giác $ABHD$ nội tiếp. Kết hợp với tứ giác $AHPD$ nội tiếp ta có:

$$APJ = 180^\circ \cdot API = 180^\circ \cdot ADI = 180^\circ \cdot AHB = CHJ$$

Suy ra $APHC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow JA.JH = JC.JP$ mà $NPDC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow JD.JN = JC.JP$.

Do đó $JA.JH = JD.JN \Rightarrow$ tứ giác $ADHN$ là tứ giác nội tiếp. Kết hợp với tứ giác $ABHD$ nội tiếp

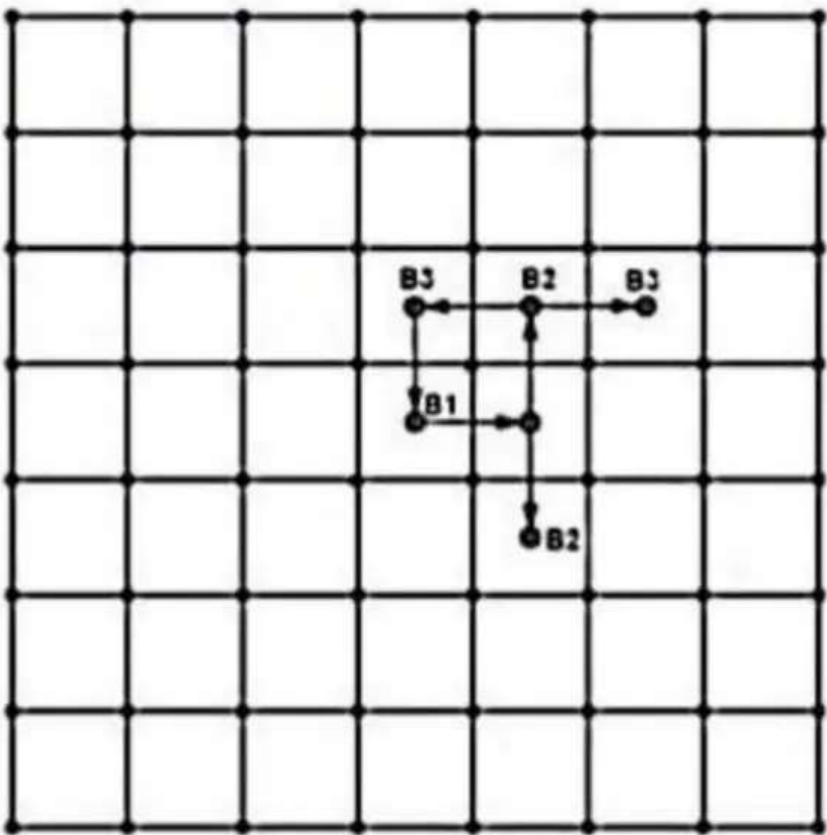
$\Rightarrow$ Năm điểm A, D, H, N, B đồng viên $\Rightarrow$ tứ giác $ABND$ nội tiếp $\Rightarrow BND = 180^\circ - BAC$.

Hơn nữa, $CDN = CMJ = \frac{1}{2}CMA = \frac{1}{2}CAB$ nên ta có:

$$BNC = BND + CND = 180^\circ.BAC + \frac{1}{2}BAC = 180^\circ \cdot \frac{1}{2}BAC = 180^\circ - \frac{1}{2}BTC$$

Từ đó, ta có $BNC = 180^\circ \cdot \frac{1}{2}BTC$. Mà $TB = TC$ nên N nằm trên đường tròn tâm T bán kính TB . $\Rightarrow T$ là tâm đường tròn (BNC). Mà T thuộc (O) cố định nên tâm (BNC) di chuyển trên 1 đường cố định. Kết thúc chứng minh.

Câu 5: (1 điểm) Cho bảng vuông 7×7 gồm 9 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 con robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với ô vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chnyên tiếp theo hướng đó sang tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế (một ví dụ về cách di chuyên của một con robot như hình vẽ). Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot như thế nào thì vẫn luôn có một thời điểm mà có hai con robot ở cùng một ô vuông không.



Lời giải:

Giả sử tồn tại một cách xếp mà với mọi thời điểm thì không tồn tại 2 con robot đứng cùng 1 ô.

Ta điền cách số 1,2,3,4 cho bảng 7×7 như sau:

1	2	1	2	1	2	1
---	---	---	---	---	---	---

4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1

- **Nhận xét 1.** Sau mỗi bước di chuyển thì đó là ô con robot đứng lúc sau khác tính chẵn lẻ với số ở ô con robot đứng lúc trước.

Chứng minh. Do các ô chung cạnh với các ô số lẻ (1,3) đều là các ô số chẵn (2,4) và ngược lại, nếu sau mỗi bước số ở ô con robot đứng sau thay đổi tính chẵn lẻ.

- **Nhận xét 2.** Sau 2 bước di chuyển thì số ở ô con robot đứng lúc sau sẽ bằng 2 cộng với số ở con robot đứng lúc trước theo mod 4 .

Chứng minh. Xét hình vuông 3×3 mà có 1 con robot làm tâm, sau 2 bước di chuyển thì con robot đó chỉ có thể di chuyển đến các ô ở góc của hình vuông 3×3 . Ta thấy các số ở các ô góc đó không bằng với số ở tâm. Theo Nhận xét 1 thì sau 2 bước số ở ô sau và trước cùng tính chẵn lẻ, từ đó ta có Nhận xét 2.

- **Nhận xét 3.** Sau lượt đầu tiên (lượt đầu tiên này các con robot đi không có quy luật) có không quá 9 con robot cùng đứng ở các ô số 1 .

Chứng minh. Giả sử sau lượt đầu có lớn hơn hoặc bằng 10 con robot cùng đứng ở các ô có được điền số 1 . Xét 2 lượt tiếp theo và sử dụng Nhận xét 2 thì lớn hơn bằng 10 con robot đó sẽ cùng đi vào các ô số 3. Để ý rằng trên bảng 7×7 ta chỉ có đúng 9 ô được điền số 3 nên theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại một ô số 3 mà có 2 con robot, mâu thuẫn với giả sử ban đầu. Nên giả sử ở trên là sai, suy ra Nhận xét 3

- **Nhận xét 4.** Sau lượt đầu tiên có không quá 18 con robot đứng ở vị trí các ô số lẻ.

Chứng minh. Áp dụng Nhận xét 3 thì chỉ có nhỏ hơn hoặc bằng 9 robot đứng ở vị trí được điền số 1 , để ý thêm rằng chỉ có tất cả 9 ô được điền số 2 nên khi kết hợp lại ta thấy có không quá 18 con robot đứng ở vị trí các ô số lẻ.

- **Nhận xét 5.** Sau lượt đầu tiên có lớn hơn hoặc bằng 19 con robot đứng ở vị trí các ô số chẵn.

Chứng minh. Áp dụng Nhận xét 4 và chỉ có 37 con robot nên có lớn hơn hoặc bằng 19 con robot đứng ở vị trí các ô số chẵn.

Quay trở lại bài toán

Sau lượt đầu tiên, kết hợp Nhận xét 5 và Nhận xét 1 thì ngay ở lượt thứ 2 , có lớn hơn hoặc bằng 19 con robot ở vị trí các ô số lẻ. Tuy nhiên điều này lại mâu thuẫn với Nhận xét 4 nên suy ra giả sử ở đầu lời giải là sai. Từ đó rút ra kết luận rằng với mọi cách xếp thì tồn tại một thời điểm