

Bài 1. a) Cho $x = \frac{\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = (1 - 7x^{2019} + x^{2021})^{2023}$

b) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = \frac{1}{yz} \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + \frac{1}{zx} \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + \frac{1}{xy} \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Bài 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(6;0), B(0;-3)$ và đường thẳng (d) có phương trình

$$y = -(m+2)x + 2m + 2 \left(m \text{ là tham số, } m \neq -2, m \neq -\frac{5}{2} \right)$$

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d) và AB

b) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng d chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau (O là gốc tọa độ)

Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN và cát tuyến ABC với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm và $AB < AC < 3R$). Gọi I là trung điểm của BC, T là giao điểm của NI với đường tròn (O) (T khác N)

a) Chứng minh rằng tam giác đều

b) Chứng minh rằng đường thẳng MT song song với đường thẳng AC

c) Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở K . Chứng minh rằng ba điểm K, M, N thẳng hàng.

Bài 4. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geq 2022$

$$\text{Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{\sqrt{y^2 + 3x^2}}{xy} + \frac{\sqrt{z^2 + 3y^2}}{yz} + \frac{\sqrt{x^2 + 3z^2}}{zx}$$

Bài 5. a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$(x-y-1)(x+1-y) + 6xy + y^2(2-x-y) = 2(x+1)(y+1)$$

b) Cho 2022 điểm phân biệt $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ trên mặt phẳng. Chứng minh rằng trên đường tròn có bán kính $R=1$ bất kì đều tồn tại điểm M sao cho $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2022} \geq 2022$

---Hết---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. a) Cho $x = \frac{\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức $P = (1 - 7x^{2019} + x^{2021})^{2023}$

b) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = \frac{1}{yz} \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + \frac{1}{zx} \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + \frac{1}{xy} \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } x = \frac{\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}} + \sqrt{10-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2} + \sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2} = \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow x^2 = 7$$

$$\text{Khi đó } P = (x^{2021} - 7x^{2019} + 1)^{2023} = [x^{2019}(x^2 - 7) + 1]^{2023} = (0 + 1)^{2023} = 1$$

$$\text{Vậy } P = 1$$

$$\text{b) Từ giả thiết } x + y + z = xyz \Rightarrow \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 1+x^2 &= x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) = x^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) = x^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \\ &= x^2 \frac{(x+y)(x+z)}{x^2 yz} = \frac{(x+y)(x+z)}{yz} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } 1+x^2 = \frac{(x+y)(x+z)}{yz}$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự } 1+y^2 = \frac{(y+x)(y+z)}{xz}; 1+z^2 = \frac{(z+x)(z+y)}{xy}$$

$$\text{Ta có: } \frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2} = \frac{(y+x)(y+z)}{xz} \cdot \frac{(z+x)(z+y)}{xy} \cdot \frac{(x+y)(x+z)}{yz} = \frac{(z+y)^2}{x^2}$$

$$\text{Biến đổi tương tự ta có } \frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2} = \frac{(x+z)^2}{y^2} \text{ và } \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2} = \frac{(x+y)^2}{z^2}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{yz} \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + \frac{1}{zx} \sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + \frac{1}{xy} \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

$$= \frac{1}{yz} \sqrt{\frac{(z+y)^2}{x^2}} + \frac{1}{zx} \sqrt{\frac{(x+z)^2}{y^2}} + \frac{1}{xy} \sqrt{\frac{(x+y)^2}{z^2}}$$

$$= \frac{1}{yz} \cdot \frac{z+y}{x} + \frac{1}{zx} \cdot \frac{x+z}{y} + \frac{1}{xy} \cdot \frac{x+y}{z} \quad (\text{do } x, y, z > 0)$$

$$= \frac{2(x+y+z)}{xyz} = 2$$

Vậy $Q = 2$

Bài 2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(6;0), B(0;-3)$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = -(m+2)x + 2m + 2$ (m là tham số, $m \neq -2, m \neq -\frac{5}{2}$)

a) Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d) và AB

b) Tìm các giá trị của m sao cho đường thẳng d chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau (O là gốc tọa độ)

Lời giải

a) Gọi phương trình đường thẳng AB có dạng $y = ax + b$

Vì đường thẳng AB đi qua $A(6;0), B(0;-3)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 6a + b = 0 \\ 0a + b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -3 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là: $y = \frac{1}{2}x - 3$

Hoàn độ giao điểm của hai đường thẳng (d) và AB là nghiệm của phương trình

$$-(m+2)x + 2m + 2 = \frac{1}{2}x - 3$$

$$\Leftrightarrow (2m-5)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \text{ (do } m \neq -\frac{5}{2} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Thay $x = 2$ vào phương trình $y = \frac{1}{2}x - 3$ ta được $y = -2$

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d) và (AB) là $M(2; -2)$

b) Ta có đường thẳng (d) giao với tam giác OAB tại cạnh OA hoặc OB

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9 \text{ và } S_{OAM} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6 > \frac{1}{2} S_{OAB}$$

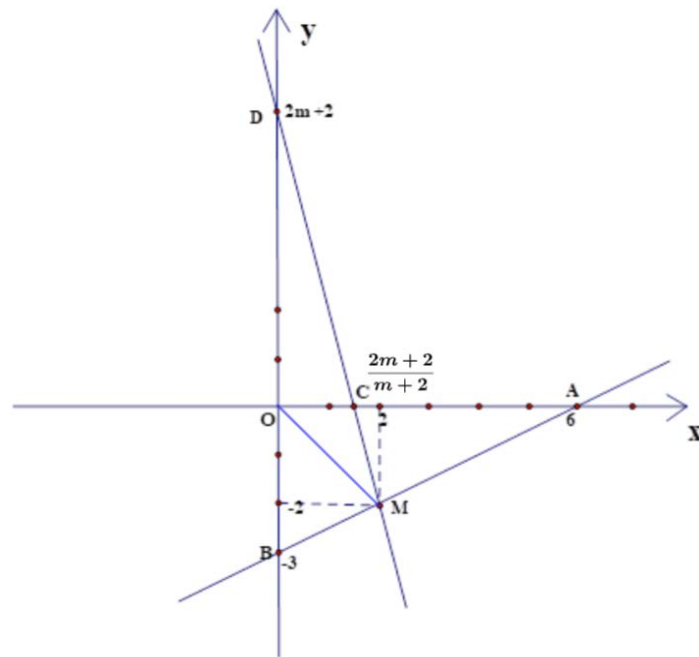
Do $S_{OAM} > S_{OAB}$ nên đường thẳng (d) chia tam giác OAB thành 2 phần có diện tích bằng nhau khi

$$(d) \text{ cắt cạnh } OA \text{ tại } C\left(\frac{2m+2}{m+2}; 0\right)$$

$$\text{Khi đó ta có } S_{AMC} = \frac{1}{2} S_{OAB} = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AC = \frac{9}{2} \Leftrightarrow AC = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 6 - \frac{2m+2}{m+2} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 2 (tm)$$

Vậy $m = 2$.



Bài 3. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Từ điểm A kẻ hai tiếp tuyến AM, AN và cát tuyến ABC với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm và $AB < AC < 3R$). Gọi I là trung điểm của BC , T là giao điểm của NI với đường tròn (O) (T khác N).

- Chứng minh rằng tam giác AMN đều
- Chứng minh rằng đường thẳng MT song song với đường thẳng AC
- Các tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau ở K . Chứng minh rằng ba điểm K, M, N thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có $AM = AN$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \triangle AMN$ cân tại A

$$\text{mà } \sin \widehat{MAO} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MAO} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 60^\circ$$

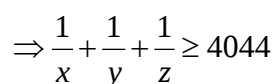
Suy ra AMN là tam giác đều

b) I là trung điểm của $BC \Rightarrow OI \perp BC$

Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{ANO} = \widehat{AIO} = 90^\circ \Rightarrow 5$ điểm A, M, I, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO

$$\Rightarrow \text{tứ giác } AION \text{ nội tiếp} \Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{AON} \text{ mà } \widehat{MTN} = \frac{1}{2} \widehat{MON} = \widehat{AON}$$

$$\Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{MTN} \Rightarrow MT \parallel AC$$



Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a Côp-ski ta có

$$\frac{\sqrt{y^2 + 3x^2}}{xy} = \frac{\sqrt{(y^2 + 3x^2)(1+3)}}{2xy} \geq \frac{y+3x}{2xy} = \frac{1}{2x} + \frac{3}{2y} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự : } \frac{\sqrt{z^2 + 3y^2}}{yz} \geq \frac{1}{2y} + \frac{3}{2z} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 3z^2}}{zx} \geq \frac{1}{2z} + \frac{3}{2x} \quad (3)$$

$$\text{Cộng (1), (2), (3)} \Rightarrow P \geq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 8088$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x = y = z = \frac{1}{1348}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 8088 khi $x = y = z = \frac{1}{1348}$

Bài 5. a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình

$$(x - y - 1)(x + 1 - y) + 6xy + y^2(2 - x - y) = 2(x + 1)(y + 1)$$

b) Cho 2022 điểm phân biệt $A_1, A_2, \dots, A_{2022}$ trên mặt phẳng. Chứng minh rằng trên đường tròn có bán kính $R = 1$ bất kì đều tồn tại điểm M sao cho $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2022} \geq 2022$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } (x - y - 1)(x + 1 - y) + 6xy + y^2(2 - x - y) = 2(x + 1)(y + 1)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 - 1 + 6xy - y^2(x + y - 2) = 2xy + 2(x + y) + 2$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 - 2(x + y) - y^2(x + y - 2) = 3$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2)(x + y - y^2) = 3$$

Do x, y nguyên nên dẫn đến các trường hợp sau

$$\text{TH1)} \quad \begin{cases} x + y - 2 = 1 \\ x + y - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{TH2)} \quad \begin{cases} x + y - 2 = 3 \\ x + y - y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 2 \\ x = 7; y = -2 \end{cases}$$

$$\text{TH3)} \quad \begin{cases} x + y - 2 = -1 \\ x + y - y^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1; y = 2 \\ x = 3; y = -2 \end{cases}$$

$$\text{TH4)} \quad \begin{cases} x + y - 2 = -3 \\ x + y - y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là: $(3; 0), (3; 2), (7; -2), (-1; 2), (3; -2), (-1; 0)$

b) Gọi M_1M_2 là đường kính của đường tròn bất kỳ có bán kính $R=1 \Rightarrow M_1M_2=2$

Ta có: $M_1A_1 + M_2A_1 \geq M_1M_2 = 2$

$$M_1A_2 + M_2A_2 \geq M_1M_2 = 2$$

...

$$M_1A_{2022} + M_2A_{2022} \geq M_1M_2 = 2$$

Suy ra $(M_1A_1 + M_1A_2 + \dots + M_1A_{2022}) + (M_2A_1 + M_2A_2 + \dots + M_2A_{2022}) \geq 4044$

Suy ra trong 2 tổng $M_1A_1 + M_1A_2 + \dots + M_1A_{2022}$ và $M_2A_1 + M_2A_2 + \dots + M_2A_{2022}$ có ít nhất 1 tổng $\geq \frac{4044}{2} = 2022$

Khi đó ta chọn $M \equiv M_1$ hoặc $M \equiv M_2$ suy ra $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2022} \geq 2022$

Bài toán được chứng minh.
