

Bài 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên x để $A \geq \frac{1+\sqrt{2024}}{\sqrt{2024}}$.

Bài 2. a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2 + 3y^2 + 2xy - 2x - 4y - 3 = 0$

b) Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18} + 5\sqrt{x}$

Bài 3. a) Cho phương trình $x^2 - (m-2)x - 3 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 + 2024} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2024} + x_2$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(x-3y) = -16 \\ y^3 + 16 = 3xy^2 \end{cases}$$
.

Bài 4. Cho điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O; R) sao cho $OA = 2R$. Từ A kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng OA cắt dây BC tại I. Gọi M là điểm di động trên cung nhỏ $\widehat{BC}$. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt AB, AC lần lượt tại E, F. Dây BC cắt OE, OF lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh rằng $\widehat{ABI} = 60^\circ$ và tứ giác OBEQ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $EF = 2PQ$.

c) Xác định vị trí của điểm M trên cung nhỏ $\widehat{BC}$ sao cho tam giác OPQ có diện tích nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó theo R.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng
$$\frac{a}{\sqrt{ab+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca+a^2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$