

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I. (2,0 điểm)

1. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$ và $a^2 = 2(a + c + 2)(a + b - 2)$.

Tính giá trị của biểu thức $A = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}$

2. Cho các số thực x, y, z khác 0, đôi một khác nhau và thỏa mãn

$$x^2 - xy = y^2 - yz = z^2 - zx. \text{ Chứng minh } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

Câu II. (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(x^2 + 4\sqrt{x^2 + 4x + 3}) = 4x$

- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Câu III. (2,0 điểm)

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 - 2(x + y) = xy$
2. Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n^2 - np$ là bình phương của một số nguyên dương

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và $\angle BAC = 60^\circ$. Đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường thẳng ID cắt EF tại K , đường thẳng qua K và song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại M, N

- 1) Chứng minh rằng các tứ giác $IFMK$ và $IMAN$ nội tiếp
- 2) Gọi J là giao điểm của AK và BC . Chứng minh J là trung điểm của BC và $AC - AB = 2DJ$
- 3) Gọi S là diện tích tứ giác $IEAF$. Tính S theo r và chứng minh $S_{IMN} > \frac{S}{4}$ (trong đó S_{IMN} là diện tích tam giác IMN)

Câu V. (1,0 điểm) Xét ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 14$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + y + 48 \left(\frac{1}{\sqrt{x+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+2}} \right)$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,0 điểm)

3. Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 0$ và $a^2 = 2(a + c + 2)(a + b - 2)$.

Tính giá trị của biểu thức $A = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}$

$$\text{Ta có } a + b + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -(b + c) \\ b = -(a + c) \\ c = -(a + b) \end{cases}$$

Thay vào điều kiện $a^2 = 2(a + c + 2)(a + b - 2)$ ta có :

$$(b + c)^2 = 2(-b + 2)(-c - 2) \Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = (-2b + 4)(-c - 2)$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + 4b - 4c - 8 \Leftrightarrow (b - 2)^2 + (c + 2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 0$$

$$\text{Vậy } A = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} = 2^{2022} + (-2)^{2022} = 2^{2023}$$

4. Cho các số thực x, y, z khác 0, đôi một khác nhau và thỏa mãn

$$x^2 - xy = y^2 - yz = z^2 - zx. \text{ Chứng minh } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

$$\text{Giả sử ta có : } x^2 - xy = y^2 - yz = z^2 - zx = a$$

$$x^2 - xy = a \Leftrightarrow x(x - y) = a \Leftrightarrow x = \frac{a}{x - y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x - y}{a}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có : } \frac{1}{y} = \frac{y - z}{a}; \frac{1}{z} = \frac{z - x}{a}$$

$$\text{Khi đó ta có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{x - y + y - z + z - x}{a} = 0 \text{ (đpcm)}$$

Câu II. (2,0 điểm)

3) Giải phương trình $(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(x^2 + 4\sqrt{x^2 + 4x + 3}) = 4x$

$$\text{ĐK : } x > 0$$

$$\text{Khi đó : } (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+1})(x^2 + 4\sqrt{x^2 + 4x + 3}) = 4x$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{2(x^2 + 4\sqrt{x^2 + 4x + 3})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1}} = 4x \Leftrightarrow x^2 + 4\sqrt{x^2 + 4x + 3} = 2x\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} \\
&\Leftrightarrow x^2 + 4\sqrt{(x+1)(x+3)} = 2x\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} \\
&\Leftrightarrow x(x - 2\sqrt{x+3}) + 2\sqrt{x+1}(2\sqrt{x+3} - x) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - 2\sqrt{x+1})(x - 2\sqrt{x+3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4x + 4 \\ x^2 = 4x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{2} \\ x = 6 \\ x = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện $\Rightarrow x \in \{6; 2 + \sqrt{2}\}$

4) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0(1) \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0(2) \end{cases}$$

Ta có : $(1) \Leftrightarrow y^2 - xy - y - 2x^2 + 5x - 2 = 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y^2 - (x+1)y - 2x^2 + 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 - (x+1)y + (x-2)(1-2x) = 0 \\
&\Leftrightarrow y^2 - (2x-1-x+2)y + (x-2)(1-2x) = 0 \\
&\Leftrightarrow y^2 - (2x-1)y + (x-2)y + (x-2)(1-2x) = 0 \\
&\Leftrightarrow y(y-2x+1) + (x-2)(y-2x+1) = 0 \Leftrightarrow (y+x-2)(y-2x+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2-x \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 + (2-x)^2 + x + 2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1 \\ y = 2x-1 \Rightarrow (2) \Leftrightarrow x^2 + (2x-1)^2 + x + 2x - 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = -\frac{4}{5}; y = -\frac{13}{5} \end{cases} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy $(x; y) \in \left\{ (1; 1); \left(-\frac{4}{5}; -\frac{13}{5}\right) \right\}$

Câu III. (2,0 điểm)

3. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 - 2(x+y) = xy$

Ta có :

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 2(x+y) = xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - xy = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - (2+y)x + y^2 - 2y = 0(*)
\end{aligned}$$

Xem phương trình đã cho là phương trình bậc hai ẩn x

$$\Delta = (2+y)^2 - 4(y^2 - 2y) = y^2 + 4y + 4 - 4y^2 + 8y = -3y^2 + 12y + 4$$

Để tồn tại cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 - 2(x+y) = xy$ thì pt (*) phải có

$$\text{nghiệm} \Rightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 12y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6-4\sqrt{3}}{3} \leq y \leq \frac{6+4\sqrt{3}}{3}$$

Mà y nguyên dương nên $y \in \{1; 2; 3; 4\}$

$$*) y = 1 \Rightarrow x^2 + 1 - 2(x + 1) = x \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} (ktm)$$

$$*) y = 2 \Rightarrow x^2 + 4 - 2(x + 2) = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (ktm) \\ x = 4 (tm) \end{cases}$$

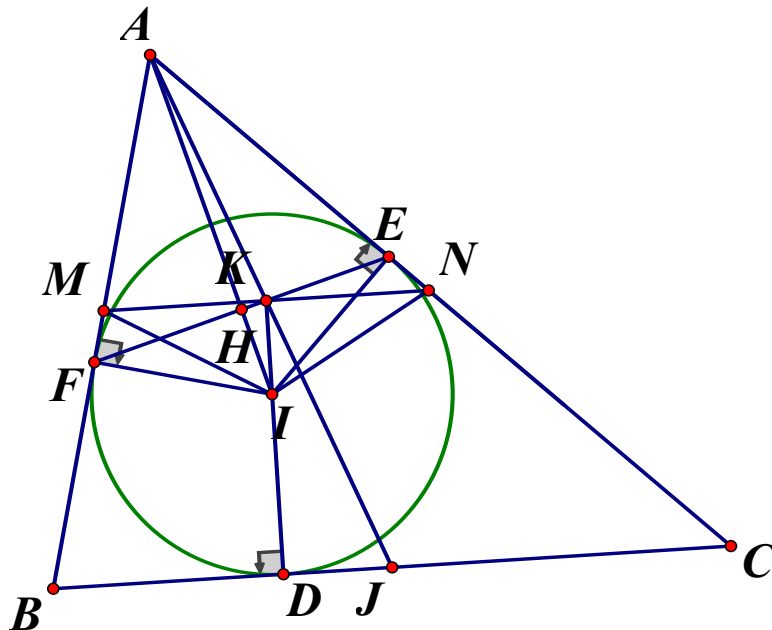
$$*) y = 3 \Rightarrow x^2 + 9 - 2(x + 3) = 3x \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} (ktm)$$

$$*) y = 4 \Rightarrow x^2 + 16 - 2(x + 4) = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases} (tm)$$

Vậy có 2 cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán $(2; 4); (4; 4)$

4. Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n^2 - np$ là bình phương của một số nguyên dương
(BÍ)

Câu IV. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có $AB < AC$ và $\angle BAC = 60^\circ$. Đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường thẳng ID cắt EF tại K , đường thẳng qua K và song song với BC cắt AB, AC theo thứ tự tại M, N



4) Chứng minh rằng các tứ giác $IFMK$ và $IMAN$ nội tiếp

Ta có $\begin{cases} MN \parallel BC \\ KD \perp BC \end{cases} \Rightarrow KD \perp MN \Rightarrow \angle IKM = \angle IKN = 90^\circ$

Xét tứ giác $IFMK$ có $\angle IFM + \angle IKM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà 2 góc này đối nhau

Nên tứ giác $IFMK$ nội tiếp $\Rightarrow \angle IMF = \angle IKF$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung IF) (1)

Xét tứ giác $INEK$ có $\angle IKN = \angle IEN = 90^\circ$, mà 2 góc này nằm ở hai đỉnh kề nhau nên tứ giác $INEK$ nội tiếp $\Rightarrow \angle ENI = \angle IKF$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle IMF = \angle ENI = \angle ANI$ nên tứ giác $AMIN$ nội tiếp (tứ giác có góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện bằng nhau)

5) Gọi J là giao điểm của AK và BC. Chứng minh J là trung điểm của BC và $AC - AB = 2DJ$

***Chứng minh J là trung điểm của BC**

Tứ giác $IFMK$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle IMK = \angle IFK$ (cùng chắn cung IK)

Tứ giác $INEK$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow \angle INK = \angle IEK$ (cùng chắn cung IK)

Mà $IE = IF$ (cùng bằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC) $\Rightarrow \triangle IEF$ cân tại I

$\Rightarrow \angle IEK = \angle IFK \Rightarrow \angle IMK = \angle INK \Rightarrow \triangle IMN$ cân tại K

Mà $IK \perp MN$ (cmt) $\Rightarrow K$ là trung điểm của MN (trong tam giác cân đường cao đồng thời là đường trung tuyến) $\Rightarrow MK = NK$

Vì $MN \parallel BC$ (gt), nên áp dụng định lí Ta-let ta có $\frac{MK}{BJ} = \frac{AK}{AJ} = \frac{NK}{CJ}$ mà $MK = NK$ (cmt)

$\Rightarrow BJ = CJ \Rightarrow J$ là trung điểm của BC

***Chứng minh $AC - AB = 2DJ$**

Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có :
$$\begin{cases} CE = CD \\ AE = AF \\ BF = BD \end{cases}$$
 Khi đó ta có :

$$AC - AB = AE + CE - (AF + BF) = (AE - AF) + CD - BD = CD - BD$$

$$= (CJ + DJ) - (BJ - DJ) = (CJ - BJ) + 2DJ$$

Mà J là trung điểm của BC (cmt) $\Rightarrow CJ = BJ \Rightarrow CJ - BJ = 0$

Vậy $AC - AB = 2DJ$ (dpcm)

6) Gọi S là diện tích tứ giác I EAF. Tính S theo r và chứng minh $S_{IMN} > \frac{S}{4}$ (trong đó

S_{IMN} là diện tích tam giác IMN)

***Tính diện tích I EAF theo r**

Áp dụng tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau nên ta có : AI là phân giác của $\angle BAC$

$\Rightarrow \angle IAF = \angle IAE = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$. Xét tam giác vuông IAE có :

$$AE = IE \cdot \cot 30^\circ = r\sqrt{3} = AF \Rightarrow S_{IEA} = \frac{1}{2} IE \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot r \cdot r\sqrt{3} = \frac{r^2\sqrt{3}}{2} = S_{IAF}$$

$$\Rightarrow S_{IEAF} = S_{IAE} + S_{IAF} = r^2\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } S = r^2\sqrt{3}$$

***Chứng minh $S_{IMN} > \frac{S}{4}$ (trong đó S_{IMN} là diện tích tam giác IMN)**

Gọi H là giao điểm của AI và EF. Ta có :

$AE = AF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow A$ thuộc trung trực của EF

$IE = IF = r \Rightarrow I \in$ trung trực của EF

$\Rightarrow AI$ là trung trực của EF $\Rightarrow AI \perp EF$ tại H

Tứ giác $AEIF$ có $\angle AEI + \angle AFI = 180^\circ$ mà 2 góc này đối nhau nên $AEIF$ là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow \angle EAF + \angle EIF = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \angle EIF = 180^\circ \Rightarrow \angle EIF = 120^\circ$

Mà IA là phân giác của $\angle EIF$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \angle EIH = \angle FIH = 60^\circ$

Xét tam giác IHE có $HE = IH$, $\tan 60^\circ = IH\sqrt{3} \Rightarrow EF = 2HE = 2IH\sqrt{3}$ (3)

Tứ giác $AMIN$ nội tiếp (cm câu a) $\Rightarrow \angle EAF + \angle NIM = 180^\circ$ (tính chất tứ giác nội tiếp)
 $\Rightarrow \angle NIM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Tam giác IMN cân tại I (cmt) nên đường cao IK đồng thời là phân giác
 $\Rightarrow \angle NIK = \angle MIK = 60^\circ$

Xét tam giác vuông NIK có $NK = IK \cdot \tan 60^\circ = IK\sqrt{3} \Rightarrow MN = 2NK = 2IK\sqrt{3}$ (4)

Lại có $IH \leq IK$ (quan hệ vuông góc, đường xiên)

Do đó từ (3) và (4) suy ra $EF \leq MN$. Ta có $S_{IMN} = \frac{1}{2} IK \cdot MN = \frac{1}{2} \frac{MN}{2\sqrt{3}} MN = \frac{MN^2}{4\sqrt{3}} \geq \frac{EF^2}{4\sqrt{3}}$

Xét tam giác AEF có $\begin{cases} \angle EAF = 60^\circ (gt) \\ AE = AF (cmt) \end{cases} \Rightarrow \triangle AEF$ đều $\Rightarrow EF = AE = r\sqrt{3}$

$$\Rightarrow S_{IMN} = \frac{(r\sqrt{3})^2}{4\sqrt{3}} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Mà } S = r^2\sqrt{3} (cmt) \Rightarrow S_{IMN} \geq \frac{S}{4} (dfcm)$$

Câu V. (1,0 điểm) Xét ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 14$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + y + 48 \left(\frac{1}{\sqrt{x+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+2}} \right)$

Phá căn bằng AM-GM và áp dụng dồn biến bằng cộng mẫu, ta có :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+z}} &= \frac{4}{2\sqrt{4(x+z)}} \geq \frac{4}{x+z+4} \\ \frac{1}{\sqrt{y+2}} &= \frac{4}{2\sqrt{4(y+2)}} \geq \frac{4}{y+2+4} = \frac{4}{y+6} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+2}} \geq \frac{16}{x+y+z+10}$$

Đưa $x^2 + y^2 + z^2 \leq 14$ từ bậc 2 về bậc 1 bằng BĐT Bunhia copxki cho 3 số, ta được :

$$(x+2y+3z)^2 \leq (1^2+2^2+3^2)(x^2+y^2+z^2) \leq 14$$

Biến đổi biểu thức P về mô hình 1 biến nghịch đảo :

$$P \geq 2x + y + \frac{768}{x+y+z+10} = 3(x+y+z+10) + \frac{48 \cdot 16}{x+y+z+10} = (x+2y+3z) - 30$$

$$P \geq 2\sqrt{3 \cdot 48 \cdot 16} - 14 - 30 = 52$$

$$\Rightarrow \text{Min } P = 52 \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y+z+10) = \frac{48 \cdot 16}{x+y+z+10} \\ x+2y+3z = 14; x+z = 4; y+2 = 6 \Rightarrow x=1; y=2; z=3 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \end{cases}$$