

Ngày thi: 12/10/2022

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm 05 câu, có 01 trang)

Câu 1 (5,0 điểm). Cho hàm số $f_n(x) = x^3 + 3x^2 - \frac{12}{n^2}$ với $x \in \mathbb{R}$ và tham số n là số nguyên dương.

- a) Chứng minh rằng với mỗi số n nguyên dương, phương trình $f_n(x) = 0$ luôn có nghiệm dương duy nhất x_n .
- b) Tìm $\lim(n x_n)$ và $\lim[n(n x_n - 2)]$.

Câu 2 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn và không cân có ba đường cao AT, BE, CF đồng quy tại trực tâm H ($T \in BC, E \in CA, F \in AB$). Gọi D là trung điểm của BC . Lấy G trên EF sao cho AG vuông góc EF . Gọi K là hình chiếu vuông góc của H lên AD . Gọi X là giao điểm của BC và EF . Đường tròn đường kính AX cắt AB, AC lần lượt tại M, N ($M \neq A, N \neq A$). Đường thẳng MN cắt BE, CF lần lượt tại P, Q .

- a) Chứng minh rằng T nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AGK .
- b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ và đường tròn ngoại tiếp tam giác AGK tiếp xúc với nhau.

Câu 3 (4,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Chứng minh rằng với mọi số nguyên n và $n \geq 3$, luôn tồn tại cặp số nguyên dương lẻ (x, y) thỏa mãn $7x^2 + y^2 = 2^n$.

Câu 5 (3,0 điểm). Có bao nhiêu tập A thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tập A có 2022 phần tử là các số thực dương phân biệt trong đó có số 1 và số 2, nếu lấy hai phần tử phân biệt bất kỳ x và y thuộc tập A thì ít nhất một trong hai số $|x - y|$ và $x + y$ cũng thuộc tập A ?

.....HẾT.....

Ghi chú:

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Giám thị số 1: Giám thị số 2: