

LỜI GIẢI ĐỀ THI CHỌN ĐỘI QUẢNG TRỊ 2023 – 2024

Vòng 1

Câu 1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = \frac{3}{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 - \frac{3}{2^{n+2}}}$ với mọi $n \geq 1$.

a) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

b) Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$.

Lời giải. a) Từ giả thiết ta có

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 - \frac{3}{2^{n+2}}} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = 2u_n^2 - \frac{3}{2^{n+2}} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - \frac{1}{2^{n+2}} = 2\left(u_n^2 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Suy ra dãy (v_n) với $v_n = u_n^2 - \frac{1}{2^{n+1}}$ là cấp số nhân công bội 2. Nên

$$u_n^2 - \frac{1}{2^{n+1}} = v_n = 2^{n-1}v_1 = 2^{n-1}\left(u_1^2 - \frac{1}{4}\right) = 2^n \Rightarrow u_n^2 = 2^n + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Vậy $u_n = \sqrt{2^n + \frac{1}{2^{n+1}}}, \forall n \geq 1$.

b) Từ câu a) suy ra $\sqrt[n]{u_n^2} = \sqrt[n]{2^n + \frac{1}{2^{n+1}}}, \forall n \geq 1$.

Với mọi $n \geq 1$, ta có $\sqrt[n]{2^n + \frac{1}{2^{n+1}}} < \sqrt[n]{2^n + 2^n} = 2\sqrt[n]{2}$ và $\sqrt[n]{2^n + \frac{1}{2^{n+1}}} > \sqrt[n]{2^n} = 2$, nên $2 < \sqrt[n]{u_n^2} < 2\sqrt[n]{2}$.

Mặt khác, từ $1 \leq \sqrt[n]{2} = \sqrt[n]{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdots 1} < \frac{2\sqrt{2} + n - 2}{n}$ với n đủ lớn, và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2} + n - 2}{n} = 1$, ta suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n^2} = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \sqrt{2}.$$

Câu 2. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có I là tâm đường tròn nội tiếp. AI cắt BC tại D , cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại $E \neq A$. Gọi ω là đường tròn qua C và tiếp xúc với AD tại D . ω cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC tại $F \neq C$.

a) Chứng minh $EF^2 = ED \cdot EA$.

b) Chứng minh CF đi qua trung điểm của AD .

Lời giải. a) Ta có $\angle EIC = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C = \angle ECI$ nên $EI = EC$.

Tương tự, $EI = EB$ nên E chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC .

Hai tam giác EDC và ECA đồng dạng với nhau nên

$$\frac{ED}{EC} = \frac{EC}{EA} \Rightarrow ED \cdot EA = EC^2.$$

Do E là tâm của (BIC) nên $EF = EC$. Suy ra

$$EF^2 = EC^2 = ED \cdot EA.$$

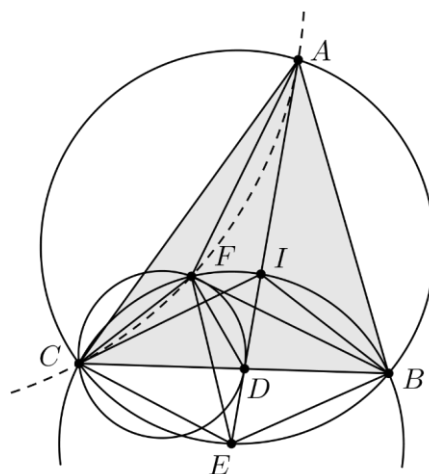
b) **Cách 1.** Từ câu a) suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn (ADF) , nên $\angle FAE = \angle DFE$.

Theo tính chất góc ngoài của tam giác, ta có

$$\angle DFE = \angle FDA - \angle FEI \Rightarrow \angle FAE = \angle FDA - \angle FEI.$$

Đề ý rằng $\angle FDA = \angle FCD$ (do DA là tiếp tuyến của (CDF)) và $\angle FEI = 2\angle FCI$ (tính chất góc ở tâm) nên

$$\begin{aligned} \angle FAE &= \angle FCD - 2\angle FCI \\ &= \angle ICD - \angle FCI = \angle ICA - \angle FCI = \angle FCA. \end{aligned}$$



Suy ra $\angle FAE = \angle FCA$, nên AD cũng là tiếp tuyến của (AFC) .

Gọi M là giao điểm của CF và AD . Do AD là tiếp tuyến chung của (CFD) và (CFA) nên $MD^2 = MF \cdot MC = MA^2 \Rightarrow MA = MD$, hay CF đi qua trung điểm M của AD .

Cách 2. Gọi J là tâm bàng tiếp góc A của tam giác ABC . Do $CI \perp CJ$ nên $(AD; IJ) = -1$.

Gọi M là trung điểm của AD thì theo hệ thức Newton, $MA^2 = MD^2 = \overline{MI} \cdot \overline{MJ}$. Mà MD là tiếp tuyến của (CDF) nên suy ra $\mathcal{O}_{(M/(CDF))} = \mathcal{O}_{(M/(ICJ))}$, suy ra M thuộc trục đẳng phương của (ICJ) và (CDF) , tức $M \in CF$. Vậy, CF đi qua trung điểm M của AD .

Câu 3. Quanh một cái ao hình tròn, có $n \geq 2$ vị trí, được đánh số từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ. Các chú ếch tình nghịch $F_1, F_2, \dots, F_n$ ngồi vào n vị trí đó sao cho chú ếch F_i ngồi ở vị trí thứ i . Các chú ếch lần lượt nhảy xuống ao theo quy tắc sau: chú ếch F_1 nhảy đầu tiên, sau đó theo chiều kim đồng hồ cứ cách một chú ếch thì chú ếch tiếp theo nhảy. Quá trình tiếp tục cho đến khi chỉ còn lại một chú ếch trên bờ. Hãy xác định chú ếch còn lại cuối cùng đó trong mỗi trường hợp sau:

a) $n = 16$.

b) $n = 2023$.

Lời giải. a) Theo quy tắc, thứ tự nhảy của các chú ếch là

$$F_1 \rightarrow F_3 \rightarrow F_5 \rightarrow \dots \rightarrow F_{15} \rightarrow F_2 \rightarrow F_6 \rightarrow F_{10} \rightarrow F_{14} \rightarrow F_4 \rightarrow F_{12} \rightarrow F_8.$$

Vậy chú ếch còn lại cuối cùng trên bờ là F_{16} .

b) Ta chứng minh nhận định sau:

Nếu có 2^n chú ếch $F_1, F_2, \dots, F_{2^n}$ thực hiện nhảy xuống ao theo quy tắc trên thì chú ếch còn lại cuối cùng trên bờ là F_{2^n} .

Ta chứng minh nhận định trên bằng phương pháp quy nạp, theo n .

Với $n = 1$, nhận định đúng. Giả sử nhận định đúng với $n = k \geq 1$.

Với $n = k + 1$. Rõ ràng, theo quy tắc, các chú ếch có chỉ số lẻ nhảy trước, cho đến khi tất cả các chú ếch chỉ số lẻ nhảy hết thì mới đến các chú ếch chỉ số chẵn nhảy.

Mà sau khi các chú ếch chỉ số lẻ nhảy hết, trên bờ còn lại các chú ếch chỉ số chẵn, với số lượng là $2^{k+1} - 2^k = 2^k$. Không mất tổng quát, ta đặt tên lại các chú ếch này bởi $G_i = F_{2i}$.

Do chú ếch chỉ số lẻ cuối cùng nhảy xuống là $F_{2^{k+1}-1}$ nên theo quy tắc, chú ếch nhảy tiếp theo là F_2 , tức G_1 . Lúc này, tình huống trở về trường hợp 2^k chú ếch. Theo giả thiết quy nạp, chú ếch còn lại cuối cùng trên bờ là G_{2^k} , tức $F_{2^{k+1}}$. Nhận định được chứng minh.

Quay lại bài toán. Ta có $2023 = 999 + 2^{10}$. Như vậy, sau khi có 999 chú ếch nhảy xuống ao kể từ chú ếch mang áo số 1 thì số ếch còn lại là 2^{10} . Mà chú ếch nhảy lần thứ 999 là F_{1997} , do $2 \times 999 - 1 = 1997$, nên sau lượt đó, chú ếch F_{1999} nhảy xuống và đóng vai trò là chú ếch nhảy đầu tiên trong 2^{10} chú ếch còn lại. Rõ ràng trong số các chú ếch còn lại, chú ếch kề với F_{1999} theo chiều ngược kim đồng hồ là F_{1998} , nên theo nhận định ở trên, chú ếch còn lại cuối cùng trên bờ là F_{1998} .

Câu 4. Cho k là một số nguyên dương. Một số nguyên tố p được gọi là k -tốt nếu tồn tại các số nguyên dương a, b sao cho cả hai số $\frac{a+b}{p}$ và $\frac{a^k+b^k}{p^2}$ đều là các số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau với p .

a) Chứng minh rằng không tồn tại số 4-tốt, và tồn tại vô hạn số 2-tốt.

b) Ký hiệu $f(k)$ là số các số k – tốt. Chứng minh rằng nếu m, n là các số nguyên dương lẻ nguyên tố cùng nhau, thì $f(mn) = f(m) + f(n)$.

Lời giải. a) Trước hết, ta chứng minh không tồn tại số 4 – tốt. Thật vậy, giả sử p là một số 4 – tốt. Nếu $p \mid a$ thì do $p \mid a + b$ nên $p \mid b$. Suy ra $a^4 + b^4 : p^4$, nên $\frac{a^4 + b^4}{p^2}$ là một số nguyên chia hết cho p^2 , trái giả thiết. Do đó, $(a, p) = 1$. Tương tự, $(b, p) = 1$.

Từ $\frac{a+b}{p} \in \mathbb{Z}$, suy ra $a \equiv -b \pmod{p} \Rightarrow a^4 + b^4 \equiv 2b^4 \pmod{p}$. Mà $a^4 + b^4 : p$, nên $p \mid 2b^4$. Theo trên, $(b, p) = 1$, nên $p = 2$.

Khi đó, a, b phải là các số lẻ, dẫn đến $a^4 + b^4 \equiv 2 \pmod{4}$, tức là $\frac{a^4 + b^4}{4} \notin \mathbb{Z}$, trái giả thiết. Vậy, không tồn tại số 4 – tốt.

Tiếp theo, ta chứng minh mọi số nguyên tố p đều là số 2 – tốt. Thật vậy, chọn $a = p, b = p^2$. Khi đó $\frac{a+b}{p} = 1 + p, \frac{a^2 + b^2}{p^2} = 1 + p^2$ đều là các số nguyên và nguyên tố cùng nhau với p .

b) Trước hết, $f(1) = 0$, do với mọi số nguyên tố p , nếu $\frac{a+b}{p}$ nguyên và nguyên tố cùng nhau với p thì $\frac{a+b}{p^2} \notin \mathbb{Z}$. Do đó, nếu m hoặc n bằng 1, thì hiển nhiên ta có $f(mn) = f(m) + f(n)$.

Với m, n lẻ ≥ 3 , ta cần bổ đề sau.

Bổ đề. Với n lẻ ≥ 3 , $f(n)$ chính bằng lực lượng của tập hợp $S_n = \{p \in \mathcal{P} \mid v_p(n) = 1\}$.

Chứng minh Bổ đề. Giả sử p là một số n – tốt. Khi đó, $a + b : p$. Hơn nữa, bằng lập luận như ở phần đầu của câu a), ta cũng có $(a, p) = (b, p) = 1$. Cùng với n lẻ, theo định lý Nâng lũy thừa (LTE),

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(a + b) + v_p(n).$$

Mà $v_p(a + b) = 1, v_p(a^n + b^n) = 2$ nên $v_p(n) = 1$.

Ngược lại, nếu p là số nguyên tố thoả mãn $v_p(n) = 1$. Chọn $a = 1, b = p - 1$ thì $v_p(a + b) = v_p(p) = 1, v_p(a^n + b^n) = v_p(a + b) + v_p(n) = 2$, nên p là một số n – tốt. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán. Do $(m, n) = 1$ nên $p \in S_{mn} \Leftrightarrow v_p(mn) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} v_p(m) = 1, v_p(n) = 0 \\ v_p(n) = 1, v_p(m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p \in S_m \cup S_n$.

Suy ra $S_{mn} = S_m \cup S_n$. Hơn nữa, ta cũng có $S_m \cap S_n = \emptyset$ do $(m, n) = 1$, nên $|S_{mn}| = |S_m| + |S_n|$, hay $f(mn) = f(m) + f(n)$.