

Bài 1. (2, 0 điểm)

- Cho $f(x) = x^2 - 3x - 5$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Đặt $g(x) = x^2 - 4$. Tính giá trị của $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$.
- Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$. Chứng minh rằng $(a^3 + b^3)(b^{25} + c^{25})(c^{2021} + a^{2021}) = 0$.

Bài 2. (2, 5 điểm)

- Giải phương trình $4\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x} = 3x + 9$.
- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{3x^2 + 33} + 3\sqrt{2x+y-1} = 3x + y + 6 \end{cases}$$

Bài 3. (3, 5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi S là giao điểm của các đường thẳng BC và EF , gọi M là giao điểm khác A của SA và đường tròn (O) .

- Chứng minh rằng tứ giác $AEHF$ nội tiếp và HM vuông góc với SA .
- Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng SH vuông góc với AI .
- Gọi T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT . Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác SMT và CET tiếp xúc với nhau.

Bài 4. (1, 0 điểm)

Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3 - 5n - 1$ không là số chính phương.

Bài 5. (0, 5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} + \frac{c}{3c^2 + 2a^2 + b^2}$$

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (2, 0 điểm)

1. Cho $f(x) = x^2 - 3x - 5$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Đặt $g(x) = x^2 - 4$. Tính giá trị của $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$.

2. Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$. Chứng minh rằng $(a^3 + b^3)(b^{25} + c^{25})(c^{2021} + a^{2021}) = 0$.

Lời giải

1. Cho $f(x) = x^2 - 3x - 5$ có hai nghiệm là x_1, x_2 . Đặt $g(x) = x^2 - 4$. Tính giá trị của $T = g(x_1) \cdot g(x_2)$.

Vì x_1, x_2 là nghiệm của $f(x) = x^2 - 3x - 5$ nên ta có:

$$\begin{cases} x_1^2 - 3x_1 - 5 = 0 \\ x_2^2 - 3x_2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 = 3x_1 + 5 \\ x_2^2 = 3x_2 + 5 \end{cases}.$$

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = -5 \end{cases}$ nên:

$$T = g(x_1) \cdot g(x_2)$$

$$T = (x_1^2 - 4)(x_2^2 - 4)$$

$$T = (3x_1 + 5 - 4)(3x_2 + 5 - 4)$$

$$T = (3x_1 + 1)(3x_2 + 1)$$

$$T = 9x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 1$$

$$T = 9 \cdot (-5) + 3 \cdot 3 + 1$$

$$T = -35$$

Vậy $T = -35$.

2. Cho a, b, c là các số thực dương khác 0 và thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$. Chứng minh rằng

$$(a^3 + b^3)(b^{25} + c^{25})(c^{2021} + a^{2021}) = 0$$

$$\text{Vì } (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1 \text{ nên } a+b+c \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b+c}\right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b+c}{a(a+b+c)} + \frac{b+c}{bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c) \left[\frac{1}{a(a+b+c)} + \frac{1}{bc} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c) \left[\frac{bc + a^2 + ab + ac}{abc(a+b+c)} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc(a+b+c)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{cases}$$

Vậy $(a^3 + b^3)(b^{25} + c^{25})(c^{2021} + a^{2021}) = 0$ (đpcm).

Bài 2. (2, 5 điểm)

1. Giải phương trình $4\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x} = 3x + 9$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{3x^2 + 33} + 3\sqrt{2x+y-1} = 3x + y + 6 \end{cases}$$

Lời giải

1. Giải phương trình $4\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x} = 3x + 9$.

Điều kiện xác định: $x \geq 0$, ta có:

$$4\sqrt{x+3} + 4\sqrt{x} = 3x + 9$$

$$\Leftrightarrow (x+3 - 4\sqrt{x+3} + 4) + 2(x - 2\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + 2(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}-2=0 \\ \sqrt{x}-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ (tm DKXD)}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{3x^2+33} + 3\sqrt{2x+y-1} = 3x+y+6 & (2) \end{cases}$$

$$\text{DKXD: } \begin{cases} 2x+y-1 \geq 0 \\ x+y \neq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2xy = (x+y)$$

Đặt $S = x+y, P = xy$ ($S^2 \geq 4P$) ta có:

$$S^3 - 2SP + 2P = S \Leftrightarrow S(S+1)(S-1) - 2P(S-1) = 0 \Leftrightarrow (S-1)(S^2 + S - 2P) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ S^2 + S - 2P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^2 + y^2 + x+y = 0 \end{cases}$$

TH1: Với $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$, thay vào (2) ta được:

$$\sqrt{3x^2+33} + 3\sqrt{2x+1-x-1} = 3x+1-x+6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+33} + 3\sqrt{x} = 2x+7$$

$$\Rightarrow 3x^2+33+2\sqrt{3x^2+33} \cdot 3\sqrt{x}+9x=4x^2+28x+49$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{3x^2+33} \cdot \sqrt{x} = x^2+19x+16$$

$$\Rightarrow 36(3x^2+33)x = x^4+361x^2+256+38x^3+32x^2+608x$$

$$\Leftrightarrow x^4-70x^3+393x^2-580x+256=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-4)(x-64)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=0 & (TM) \\ x=4 \Rightarrow y=-3 & (TM) \\ x=64 \Rightarrow y=-63 & (TM) \end{cases}$$

TH2: Với $x^2 + y^2 + x + y = 0$. Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn x .

Để tồn tại x thì $\Delta = 1 - 4(y^2 + y) \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4 \left(y + \frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) \left(y + \frac{1-\sqrt{2}}{2} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$$

Tương tự ta cũng có $-\frac{1+\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $2x + y - 1 \leq 2 \cdot \frac{-1+\sqrt{2}}{2} + \frac{-1+\sqrt{2}}{2} - 1 < 0$, không thỏa mãn điều kiện $2x + y - 1 \geq 0$ nên trường hợp này hệ vô nghiệm.

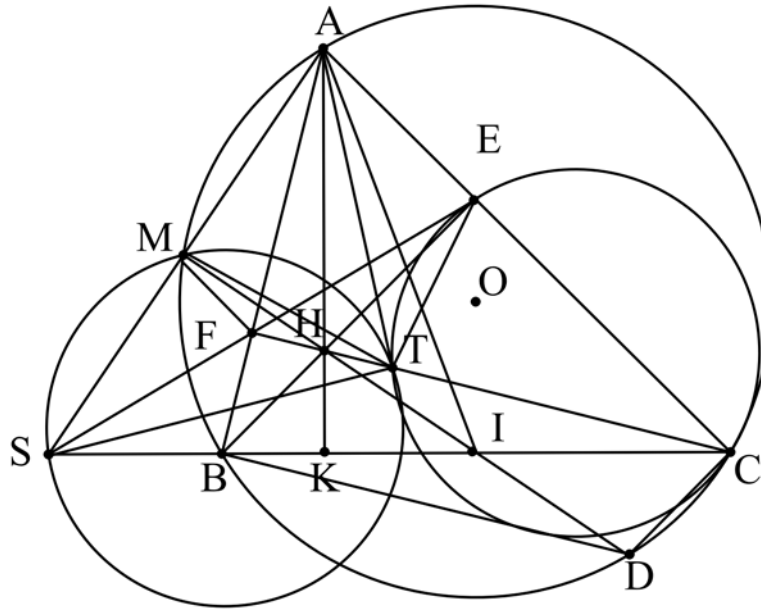
Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\{(1; 0), (4; -3), (64; -63)\}$.

Bài 3. (3, 5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) có các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Gọi S là giao điểm của các đường thẳng BC và EF , gọi M là giao điểm khác A của SA và đường tròn (O) .

- Chứng minh rằng tứ giác $AEHF$ nội tiếp và HM vuông góc với SA .
- Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng SH vuông góc với AI .
- Gọi T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT . Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác SMT và CET tiếp xúc với nhau.

Lời giải



a) Chứng minh rằng tứ giác $AEHF$ nội tiếp và HM vuông góc với SA .

Vì $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH (dnhb).

Có tứ giác $BCEF$ nội tiếp ($\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$).

$\Rightarrow \widehat{SFB} = \widehat{SCE}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Xét $\triangle SBF$ và $\triangle SCE$ có:

$\widehat{SFB} = \widehat{SCE}$ (cmt); góc $\widehat{FSB}$ là góc chung

$$\Rightarrow \triangle SBF \sim \triangle SCE (g.g) \Rightarrow \frac{SB}{SE} = \frac{SF}{SC} \Rightarrow SB \cdot SC = SF \cdot SE \quad (1)$$

Có tứ giác $BCAM$ nội tiếp đường tròn (O) . Xét $\triangle SBM$ và $\triangle SAC$ có

Góc $\widehat{SBM} = \widehat{SAC}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Góc $\widehat{MSB}$ là góc chung

$$\Rightarrow \triangle SBM \sim \triangle SAC (g.g) \Rightarrow \frac{SB}{SA} = \frac{SM}{SC} \Rightarrow SB \cdot SC = SM \cdot SA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $SF \cdot SE = SM \cdot SA \Rightarrow \frac{SF}{SM} = \frac{SA}{SE}$, lại có góc $\widehat{MSF}$ là góc chung

$$\Rightarrow \triangle SMF \sim \triangle SEA (c.g.c) \Rightarrow \widehat{SMF} = \widehat{SEA} \quad (2 \text{ góc tương ứng})$$

$\Rightarrow AMFE$ là nội tiếp đường tròn

Suy ra 5 điểm A, M, F, H, E cùng nằm trên đường tròn đường kính $AH \Rightarrow$ Tứ giác $AEHM$ nội tiếp đường tròn, suy ra góc $\widehat{HEA} = \widehat{HMS} = 90^\circ$. (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp).

Suy ra $HM \perp SA$.

b. Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng SH vuông góc với AI .

Kéo dài AO cắt đường tròn tại D , khi đó ta có $DC \parallel BH$ (cùng vuông góc với CA) và $DB \parallel CH$ (cùng vuông góc với BA) nên $BHCD$ là hình bình hành

Mà I là trung điểm của BC suy ra I là trung điểm của HD , hay I, H, D thẳng hàng.

Lại có $DM \perp AM$ do AD là đường kính, $HM \perp SA$ nên D, H, M thẳng hàng

Vậy bốn điểm D, I, H, M thẳng hàng, suy ra $IM \perp AS$.

Mà $AH \perp SI$ nên H là trực tâm $\triangle ASI \Rightarrow SH \perp AI$.

c. Gọi T là điểm nằm trên đoạn thẳng HC sao cho AT vuông góc với BT . Chứng minh rằng hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác SMT và CET tiếp xúc với nhau.

Gọi tia AH cắt BC tại K , suy ra tứ giác $HKSM$ nội tiếp do $\widehat{HKS} + \widehat{HMS} = 180^\circ$.

Xét $\triangle AMH$ và $\triangle AKS$ có: $\widehat{SAH}$ chung; $\widehat{AMH} = \widehat{AKS} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle AMH \sim \triangle AKS (g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AS} = \frac{AM}{AK} \Rightarrow AH \cdot AK = AM \cdot AS \quad (3)$$

Tương tự ta có tứ giác $HKEC$ nội tiếp suy ra

$$\triangle AEH \sim \triangle AKC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AH \cdot AK \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $AM \cdot AS = AE \cdot AC$.

Theo giả thiết, $\widehat{ATB} = \widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow AETB$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{ATE} = \widehat{ABE}$,

Mà $\widehat{ABE} = \widehat{ACT} \Rightarrow \widehat{ATE} = \widehat{ACT}$, lại có $\widehat{TAE}$ chung

$$\Rightarrow \triangle ACT \sim \triangle ATE (g.g) \Rightarrow \frac{AT}{AE} = \frac{AC}{AT} \Rightarrow AE \cdot AC = AT^2$$

Vì $\widehat{ATE} = \widehat{ACT}$ (cmt) nên AT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp của $\triangle CET$ (1)

$$\text{Lại có } AM \cdot AS = AE \cdot AC = AT^2 \Rightarrow \frac{AM}{AT} = \frac{AT}{AS}.$$

$$\text{Xét } \triangle ATM \text{ và } \triangle AST \text{ có: } \widehat{SAT} \text{ chung; } \frac{AM}{AT} = \frac{AT}{AS} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \triangle ATM \sim \triangle AST (c.g.c) \Rightarrow \widehat{ATM} = \widehat{AST} \text{ (2 góc tương ứng).}$$

Suy ra AT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp của $\triangle SMT$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai đường tròn ngoại tiếp của các tam giác ΔSMT và ΔCET tiếp xúc với nhau.

Bài 4. (1, 0 điểm)

Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3-5n-1$ không là số chính phương.

1. Lời giải

Giả sử tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 và $4n^3-5n-1$ là số chính phương.

$$\text{Ta có } 4n^3-5n-1=(n+1)(4n^2-4n-1)$$

$$\text{Đặt UCLN } (n+1; 4n^2-4n-1)=d \ (d \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} n+1:d \\ 4n^2-4n-1:d \end{cases}$$

$$\text{Có } 4n^2-4n-1=4n(n+1)-8(n+1)+7:d \Rightarrow 7:d$$

Vì $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 nên $n(n+1)$ không chia hết cho 7, suy ra $n+1$ không chia hết cho 7, suy ra $d \neq 7 \Rightarrow d=1$.

Do đó, $n+1$ và $4n^2-4n-1$ là hai số nguyên tố cùng nhau, mà tích của chúng là số chính phương suy ra $n+1$ và $4n^2-4n-1$ là các số chính phương.

$$\text{Suy ra } 4n^2-4n-1=a^2 \ (a \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (2n-1)^2-a^2=2 \Leftrightarrow (2n-a-1)(2n+a-1)=2$$

$$\text{Vì } 2n-a-1 \leq 2n+a-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2n-a-1=1 \\ 2n+a-1=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2n-a-1=-2 \\ 2n+a-1=-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} n=\frac{5}{4} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} n=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}, \text{ không thỏa mãn } n, a \text{ là các số tự nhiên.}$$

Vậy giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. (0, 5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức } T = \frac{a}{3a^2+2b^2+c^2} + \frac{b}{3b^2+2c^2+a^2} + \frac{c}{3c^2+2a^2+b^2}$$

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc \Leftrightarrow \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = 3$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} \geq 2\sqrt{\frac{a}{bc} \cdot \frac{b}{ca}} = \frac{2}{c}$$

$$\frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{b}{ca} \cdot \frac{c}{ab}} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{a}{bc} + \frac{c}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{a}{bc} \cdot \frac{c}{ab}} = \frac{2}{b}$$

Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên, ta có:

$$\Rightarrow 2\left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}\right) \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM- GM ta có:

$$3a^2 + 2b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) \geq 4ab + 2ac$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3a^2 + 2b^2 + c^2} \leq \frac{a}{4ab + 2ac} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2b + c}$$

$$\text{Áp dụng Cauchy – Schwarz ta có: } \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{b + b + c} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2b + c} \leq \frac{1}{18} \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự, ta có: } \frac{b}{3b^2 + 2c^2 + a^2} \leq \frac{1}{18} \left(\frac{2}{c} + \frac{1}{a}\right); \quad \frac{c}{3c^2 + 2a^2 + b^2} \leq \frac{1}{18} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\text{Suy ra } T \leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{6} \cdot 3 \Rightarrow T \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy GTLN của T là $\frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$.