

Câu 1: (4,0 điểm) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $2a^2 + 3b^2 + 6c^2 = 1$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4a+2} + \frac{1}{9b+3} + \frac{1}{36c+6} < 1$.

Câu 2: (4,0 điểm) Xét đa thức $P(x) = \sum_{i=0}^{2024} a_i x^i$ với các hệ số thực, có bậc bằng 2024 và có 2024 nghiệm thực phân biệt.

a) Giả sử $a_{2023} = 0$, hãy xét dấu của tích $a_{2024} \cdot a_{2022}$.

b) Gọi $k(P)$ là số lượng số $i \in \{0; 1; 2; \dots; 2024\}$ thỏa mãn $a_i = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất có thể có của $k(P)$ khi đa thức $P(x)$ thay đổi.

Câu 3: (4,0 điểm) Cho đường tròn (O) cố định và dây cung BC cố định, không là đường kính của (O) . Điểm A di động trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Các điểm T và J là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC và BHC .

a) Chứng minh khi A di động thì $OT.OJ$ không đổi.

b) Gọi P là điểm đối xứng của B qua đường thẳng AC , Q là điểm đối xứng của C qua đường thẳng AB . Lấy I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ . Chứng minh khi A di động thì đường thẳng AI luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 4: (4,0 điểm) Cho số nguyên tố lẻ p và xét số nguyên dương n thay đổi thỏa mãn: Với mỗi số nguyên dương $a > 1$, nếu a không chia hết cho p thì tổng các ước nguyên dương khác 1 của a^n chia hết cho p^{2024} .

a) Chứng minh n chia hết cho p và $p-1$.

b) Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Câu 5: (4,0 điểm) Giả sử S là tập hợp hữu hạn các điểm mà mỗi điểm của nó được tô bởi một trong hai màu đỏ hoặc xanh (điểm được tô màu đỏ gọi là điểm đỏ, điểm được tô màu xanh gọi là điểm xanh). Gọi $A_1, A_2, \dots, A_{68}$ là các tập con của tập S mà mỗi tập chứa đúng năm điểm và thỏa mãn đồng thời các điều kiện (i) và (ii) sau đây:

(i) Mỗi tập trong các tập $A_1, A_2, \dots, A_{68}$ chứa ít nhất một điểm đỏ;

(ii) Với ba điểm bất kì trong tập S , tồn tại duy nhất $i \in \{1; 2; \dots; 68\}$ mà tập A_i chứa cả ba điểm đó.

a) Tìm số phần tử của tập S .

b) Tồn tại hay không số $k \in \{1; 2; \dots; 68\}$ mà tập A_k chứa bốn hoặc năm điểm đỏ?

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: Họ tên, chữ ký GT 1
Số báo danh: Họ tên, chữ ký GT 2