

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH**

**KỲ THI TUYỂN SINH
VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn thi chuyên: Toán
Thời gian 150 phút (không kể thời gian giao đề)**

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^3 - 2x^2 + x - 5(x-1)\sqrt{x} - 6 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x + y = x^2y^2 - 15 \\ 2x + 3y = 3x^2y^2 - 13xy - 6 \end{cases}$$

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - y^2 + 2(3y + y) = 23$.

b) Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c| \leq 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b, c .

Câu 3 (2,0 điểm). Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}}$.

Câu 4 (7,0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A , I là điểm cố định trên đoạn AB và CD là dây cung thay đổi của (O) luôn đi qua I . Các đường thẳng BC, BD cắt Δ lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng $CDMN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN với đường thẳng AB . Chứng minh rằng $KMCI$ là tứ giác nội tiếp và tích $AM \cdot AN$ không đổi.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDNM$. Tìm vị trí của CD sao cho độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Câu 5 (2,0 điểm). Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau. Tìm số nguyên dương k lớn nhất để tồn tại tập hợp con A có k phần tử của tập hợp M sao cho tích của 4 số bất kì thuộc tập hợp A đều chia hết cho 3.

Đáp án đề thi vào lớp 10 môn Toán chuyên Đại Học Vinh Nghệ An năm 2023

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^3 - 2x^2 + x - 5(x-1)\sqrt{x} - 6 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x + y = x^2y^2 - 15 \\ 2x + 3y = 3x^2y^2 - 13xy - 6. \end{cases}$$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x \geq 0$. Đặt $t = (x-1)\sqrt{x}$ phương trình trở thành

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x - 5(x-1)\sqrt{x} - 6 = 0 &\Leftrightarrow x(x-1)^2 - 5(x-1)\sqrt{x} - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 5t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-6) = 0 \end{aligned}$$

Trường hợp 1. $t = -1$ suy ra $0 \leq x < 1$. Đặt $\sqrt{x} = a$ ($0 \leq a < 1$), khi đó ta có

$$(x-1)\sqrt{x} = -1 \Leftrightarrow a^3 - a + 1 = 0 \text{ (vô lý } a^3 + 1 - a > 0 \text{)}.$$

Trường hợp 2. $t = 6$. Đặt $\sqrt{x} = a$ ($a \geq 0$), khi đó ta có

$$\begin{aligned} (x-1)\sqrt{x} = 6 &\Leftrightarrow a^3 - a - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-2)(a^2 + 2a + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 2 \text{ (vì } a^2 + 2a + 3 = (a+1)^2 + 2 > 2 > 0 \text{)} \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện).} \end{aligned}$$

Vậy tất cả các nghiệm thỏa mãn phương trình là $x = 4$.

b) Ta đặt phương trình như sau
$$\begin{cases} 5x + y = x^2y^2 - 15 & (1) \\ 2x + 3y = 3x^2y^2 - 13xy - 6 & (2). \end{cases}$$

Trường hợp 1. Nếu $x = 0$ thì $-15 = y = -2$ vô lý nên trường hợp này vô nghiệm.

Trường hợp 2. Nếu $x \neq 0$, ta có biến đổi như sau

$$(1).3 - (2) \Leftrightarrow 13x = 13xy - 39 \Leftrightarrow xy = x + 3 \Leftrightarrow y = 1 + \frac{3}{x}$$

Thế $y = 1 + \frac{3}{x}$ vào phương trình (1), ta có

$$5x + 1 + \frac{3}{x} = (x + 3)^2 - 15 \Leftrightarrow 5x^2 + x + 3 = x(x^2 + 6x + 9) - 15x$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \{-3; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$$

Nếu $x = -3$ thì $y = 1 + \frac{3}{x} = 0$.

Nếu $x = 1 + \sqrt{2}$ thì $y = 1 + \frac{3}{x} = -2 + 3\sqrt{2}$.

Nếu $x = 1 - \sqrt{2}$ thì $y = 1 + \frac{3}{x} = -2 - 3\sqrt{2}$.

Vậy tất cả các nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn là $(-3; 0); (1 + \sqrt{2}, -2 + 3\sqrt{2}); (1 - \sqrt{2}, -2 - 3\sqrt{2})$.

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - y^2 + 2(3y + y) = 23$.

b) Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c| \leq 16$ và $|P(9)|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số b, c .

Lời giải

a) Ta biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2(3x + y) = 23 &\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) = 31 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - (y - 1)^2 = 31 \\ &\Leftrightarrow (x - y + 4)(x + y + 2) = 31 \end{aligned}$$

Từ đây, ta xét bảng sau

$x - y + 4$	31	1	-31	-1
$x + y + 2$	1	31	-1	-31

x	13	13	-19	-19
y	-14	16	16	-14

Vậy tất cả các nghiệm (x, y) thỏa mãn là $(13, -14); (13, 16); (-19, 16); (-19, -14)$.

b) Gọi hai nghiệm nguyên của $P(x) = x^2 + bx + c$ là u, v .

Theo định lý Vi - et ta được $u + v = -b$, $uv = c$.

Vì $|P(9)|$ là số nguyên tố nên $|(9-u)(9-v)|$ là số nguyên tố dẫn đến $|9-u|=1$ hoặc $|9-v|=1$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|9-u|=1 \Leftrightarrow u \in \{8; 10\}$.

Trường hợp 1. $u = 10$, vì $|c| \leq 16$, nên $|v| \in \{0; 1\} \Leftrightarrow v \in \{-1; 0; 1\}$.

Mặt khác $9-1=8$, $9-0=9$, $9+1=10$ đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại.

Trường hợp 2. $u = 8$, vì $|c| \leq 16$, nên $|v| \leq 2$.

Mà v phải là số chẵn nên từ đây suy ra $v \in \{-2; 2\}$. Thử lại cả hai giá trị này thỏa mãn và ta nhận được giá trị của b, c tương ứng là $-10, 16$ và $-6, -16$.

Vậy tất cả cặp (b, c) thỏa mãn là $(b, c) \in \{(-10, 16); (-6, -16)\}$.

Câu 3 (2,0 điểm). Xét các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

$$\text{thức } P = \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}}.$$

Lời giải

Ta có nhận xét sau

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} \right)^2 &= \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}} \\ &= \frac{a+b+2}{ab+a+b+1} + \frac{2}{\sqrt{ab+a+b+1}} \leq \frac{a+b+2}{a+b+1} + \frac{2}{\sqrt{a+b+1}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{a+b+1}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó ta được } \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{a+b+1}}.$$

Mặt khác, ta có $(a+b+c)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 = 1$ suy ra $a+b \geq 1-c$.

Từ đây kết hợp với $c \leq 1$ (vì $c \geq 0$ và $c^2 \leq 1$), ta suy ra

$$\begin{aligned} P &\leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2-c}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}} = 1 + \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2-c}} + \frac{1}{\sqrt{c+2}}\right)^2} = 1 + \sqrt{\frac{1}{2-c} + \frac{1}{2+c} + \frac{2}{\sqrt{4-c^2}}} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{4}{4-c^2} + \frac{2}{\sqrt{4-c^2}}} \leq 1 + \sqrt{\frac{4}{4-1} + \frac{2}{\sqrt{4-1}}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a = b = 0, c = 1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là $2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

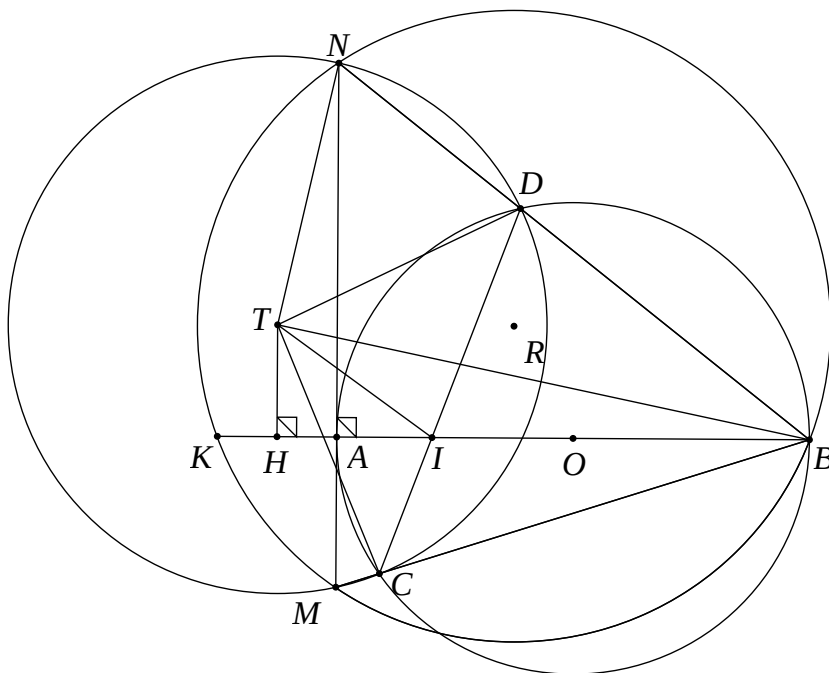
Câu 4 (7,0 điểm). Cho đường tròn (O) đường kính AB . Đường thẳng Δ tiếp xúc với (O) tại A , I là điểm cố định trên đoạn AB và CD là dây cung thay đổi của (O) luôn đi qua I . Các đường thẳng BC, BD cắt Δ lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng $CDMN$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN với đường thẳng AB . Chứng minh rằng $KMCI$ là tứ giác nội tiếp và tích $AM \cdot AN$ không đổi.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CDNM$. Tìm vị trí của CD sao cho độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Lời giải



a) Áp dụng hệ thức lượng cho hai tam giác BAM và BAN với hai đường cao tương ứng là AC, AD ta có $BA^2 = BC.BM = BD.BN$. Vì vậy tứ giác CDNМ nội tiếp.

b) Ta có biến đổi góc $\widehat{MKB} = \widehat{MNB} = \widehat{DCB}$, vì vậy tứ giác CIKM nội tiếp.

Do đó $BC.BM = BI.BK = BA^2$, từ đây suy ra K là điểm cố định.

Từ đây ta suy ra $AM.AN = AK.AB$ cố định.

c) Gọi r là bán kính của (T) thì $r^2 - TA^2 = AN.AM = a$ không đổi. Ta cũng có $ID.IC$ không đổi, đặt $b = ID.IC = r^2 - TI^2$ suy ra $TI^2 - TA^2 = a - b$.

Gọi H là hình chiếu của K lên AB theo định lý Pythagore ta có.

$$(AI + 2AH).AI = HI^2 - HA^2 = (TI^2 - TH^2) - (TA^2 - TH^2) = TI^2 - TA^2 = a - b$$

Từ đây kết hợp với AI không đổi (A và I cố định) suy ra H cố định do đó BH không đổi.

Khi đó, theo định lý Pythagore ta có.

$$BT^2 = TH^2 + BH^2 \geq BH^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi T trùng với H tức là BA là trung trực của CD suy ra CD vuông góc AB tại I. Vậy khi CD vuông góc với AB tại I thì độ dài đoạn thẳng BT nhỏ nhất.

Câu 5 (2,0 điểm). Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 2 chữ số khác nhau. Tìm số nguyên dương k lớn nhất để tồn tại tập hợp con A có k phần tử của tập hợp M sao cho tích của 4 số bất kì thuộc tập hợp A đều chia hết cho 3.

Lời giải.

Trước hết, ta đếm số phần tử thuộc M mà chia hết cho 3.

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 1, 4, 7 có 9 số thỏa mãn.

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 2, 5, 8 có 9 số thỏa mãn.

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 3, 6, 9 có 9 số thỏa mãn.

Vì vậy số phần tử chia hết cho 3 thuộc M là 27, ta chứng minh $|A|_{\max} = 30$, thật vậy. Trước hết, A không thể chứa quá 4 phần tử không chia hết cho 3 bởi vì tích của chúng sẽ không chia hết cho 3. Do đó, $|A| \leq 30$.

Xây dựng dấu bằng. Xét A là tập hợp các số có 2 chữ số khác nhau chia hết cho 3 và 3 phần tử bất kỳ thuộc các số còn lại.