

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HUNG YÊN**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS
NĂM HỌC 2021 – 2022**

Môn thi: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề).

Câu 1: (4,0 điểm)

a) Cho hai biểu thức $A = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$, $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

Tìm x để $A = B$.

b) Tìm hai số a và b sao cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $3\sqrt{(x+2)(x^2-3x+4)} = 2x^2 - 8x + 4$.

b) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = mx + m - 1$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3) = 3(x^2+y^2)+2 \\ x^2y+x^2-2x-12=0 \end{cases}$$
 với $(x, y \in \mathbb{R})$

b) Cho a, b là các số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2+b^2-2)(a+b)^2+(1-ab)^2=-4ab$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+ab}$ là số hữu tỉ

Câu 4: (2,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm bất kì trên cạnh CD (E khác C, D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K. Chứng minh rằng $\cos \widehat{AKE} = \sin \widehat{EKF} \cdot \cos \widehat{EFK} + \sin \widehat{EFK} \cdot \cos \widehat{EKF}$.

Câu 5: (4,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ không là tam giác cân, ngoại tiếp đường tròn (I;R). Gọi H, K, N lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (I;R) với các cạnh BC, AC, AB. Đường thẳng AH cắt đường tròn (I;R) tại P (P không trùng với H), Gọi Q là trung điểm của KN. Trên tia đối của tia IA lấy điểm M sao cho $IM > R$. Từ điểm M kẻ các tiếp tuyến MD, MJ với đường tròn (I;R). Qua điểm I, vẽ đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng IM cắt các tia MD, MJ theo thứ tự tại hai điểm E và F.

a) Chứng minh rằng tứ giác PQIH nội tiếp.

b) Tìm vị trí của điểm M sao cho diện tích $\triangle MEF$ nhỏ nhất.

Câu 6: (2,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1000$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức $P = \frac{a}{b^4+c^4+1000a} + \frac{b}{c^4+a^4+1000b} + \frac{c}{a^4+b^4+1000c}$.

----- **Hết** -----

**Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm**

Họ và tên thí sinh: : Số báo danh:

Chữ kí của cán bộ coi thi 1:

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HƯNG YÊN**

**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THCS
NĂM HỌC 2021 – 2022**

Môn thi: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

**HƯỚNG DẪN CHẤM
(Hướng dẫn chấm gồm 5 trang)**

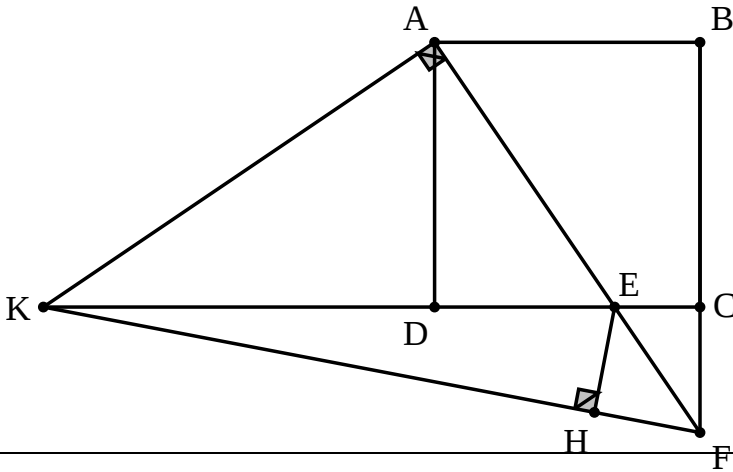
Chú ý:

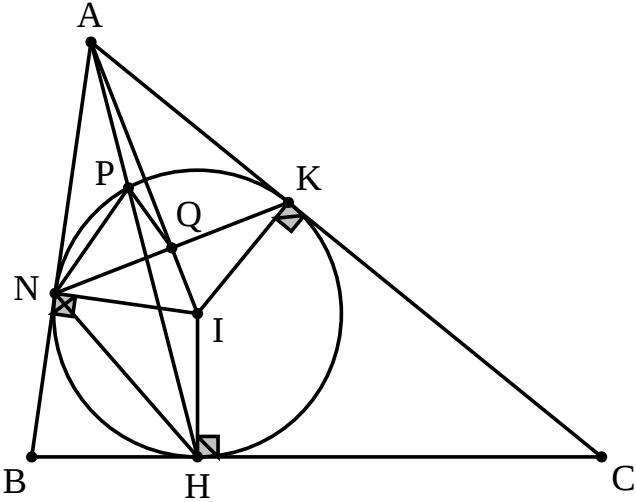
1) Hướng dẫn chấm này trình bày các bước giải và cách cho điểm từng phần của mỗi câu. Bài làm của học sinh yêu cầu phải chi tiết, lập luận chặt chẽ. Nếu học sinh giải cách khác mà đúng thì chấm điểm từng phần tương ứng.

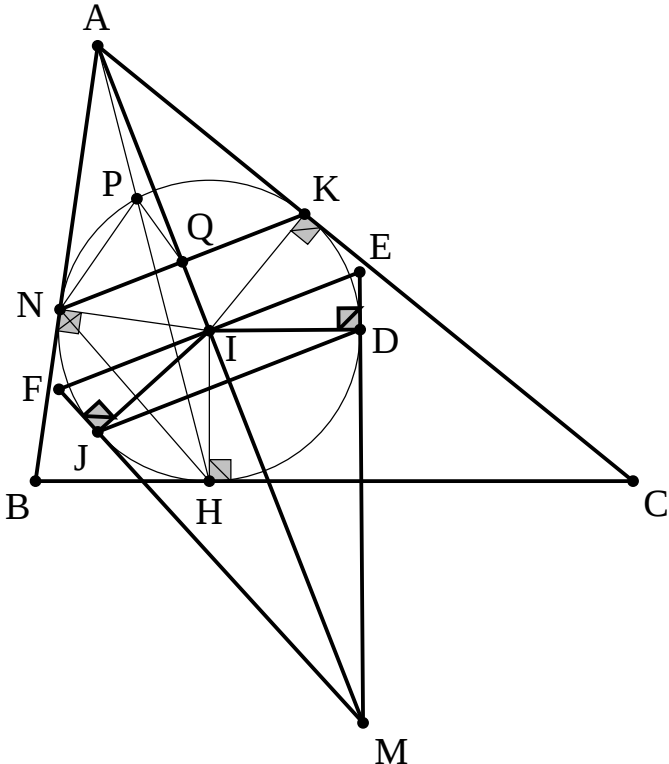
2) Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 4,0 điểm	a) Cho hai biểu thức $A = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$, $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$. Tìm x để $A = B$.	2.0
	$B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) - 36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$	0.5
	$= \frac{12\sqrt{x}-36}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{12}{\sqrt{x}+3}$	0.5
	$A = B \Leftrightarrow \frac{12}{\sqrt{x}+3} = \frac{7\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} \Leftrightarrow 12(2\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x}+3)(7\sqrt{x}-2)$ $\Leftrightarrow 7x - 5\sqrt{x} - 18 = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(7\sqrt{x}+9) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = 0 \text{ (vì } 7\sqrt{x}+9 \neq 0 \text{)}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TMĐK)}$	0.5
	b) Tìm hai số a và b sao cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$.	2.0
	Ta có $g(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$	0.5
	Vì đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$ Nên tồn tại đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x)$ $\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x+2).(x-1).q(x) \quad (*)$	0.5
	Với $x = 1$ thay vào (*) ta được $a + b + 6 = 0 \Leftrightarrow a + b = -6 \quad (1)$	0.25
	Với $x = -2$ thay vào (*) ta được $-8a + 4b - 20 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2a - b = -6 \quad (2)$	0.25
	Giải hệ phương trình (1) và (2) ta được $a = -4; b = -2$	0.25
	Vậy với $a = -4; b = -2$ thì đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa	0.25

	thức $g(x) = x^2 + x - 2$	
Câu 2 4,0 điểm	a) Giải phương trình: $3\sqrt{(x+2)(x^2-3x+4)} = 2x^2 - 8x + 4.$	2.0
	Điều kiện: $x \geq -2$	0.25
	Đặt $\sqrt{x+2} = a$ và $b = \sqrt{x^2-3x+4} \Rightarrow a \geq 0, b > 0$ Suy ra $2b^2 - 2a^2 = 2(x^2-3x+4) - 2(x+2) = 2x^2 - 8x + 4$	0.5
	Phương trình đã cho trở thành: $3ab = 2(b^2 - a^2) \Leftrightarrow 2b^2 - 2a^2 - 3ab = 0$ $\Leftrightarrow 2b^2 + ab - 2a^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow b(2b+a) - 2a(2b+a) = 0 \Leftrightarrow (2b+a)(b-2a) = 0$ $\Leftrightarrow b-2a = 0$ vì $2b+a > 0$ với mọi $a \geq 0, b > 0$	0.5
	Do đó ta có $\sqrt{x^2-3x+4} = 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2-3x+4 = 4(x+2) \Leftrightarrow x^2-7x-4 = 0$ Giải phương trình trên ta được 2 nghiệm $x_1 = \frac{7+\sqrt{65}}{2}; x_2 = \frac{7-\sqrt{65}}{2}.$	0.5
	Đối chiếu với ĐKXD ta được phương trình có 2 nghiệm $x_1 = \frac{7+\sqrt{65}}{2}; x_2 = \frac{7-\sqrt{65}}{2}$	0.25
	b) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = mx + m - 1$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.	2.0
	+) Nếu $m = 0$ thì (d) trở thành $y = -1$ không cắt cả hai trục tọa độ (loại)	0.25
	+) Nếu $m \neq 0$ xét đường thẳng (d): $y = mx + m - 1$ Gọi A là giao điểm của đường thẳng (d) với trục Oy ta có $A(0; m-1)$ $\Rightarrow OA = m-1 $	0.25
	Gọi B là giao điểm của đường thẳng (d) với trục Ox nên $B\left(-\frac{m-1}{m}; 0\right)$ $\Rightarrow OB = \left \frac{m-1}{m}\right $	0.25
	$S_{AOB} = 2 \Leftrightarrow \frac{OA \cdot OB}{2} = 2 \Leftrightarrow OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{(m-1)^2}{ m } = 4$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 4m & (m > 0) \\ m^2 - 2m + 1 = -4m & (m < 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 1 = 0 & (1) \quad (m > 0) \\ m^2 + 2m + 1 = 0 & (2) \quad (m < 0) \end{cases}$	0.25
	Giải phương trình (1) ta được $m = 3 + 2\sqrt{2}$ (TMĐK)	0.25
	Giải phương trình (2) ta được $m = -1$ (TMĐK)	0.25
	Vậy với $m \in \{3 + 2\sqrt{2}; 3 - 2\sqrt{2}; -1\}$	0.25
Câu 3 4,0 điểm	a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2+3) = 3(x^2+y^2)+2 & (1) \\ x^2y+x^2-2x-12=0 & (2) \end{cases}$	2.0

	Xét PT (1) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 3) = 3(x^2 + y^2) + 2$ $\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y = 3x^2 + 3y^2 + 2$	0.25
	$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$ $\Leftrightarrow (x - 1)^3 = (y + 1)^3$	0.25
	$\Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 2 \quad (3)$	0.25
	Thay (3) vào phương trình (2) ta được phương trình: $x^2(x - 2) + x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x - 12 = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 2x + 4) = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \quad (*) \end{cases}$	0.25
	Giải phương trình (*) có $\Delta' = -3 < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm	0.25
	Thay $x = 3$ vào phương trình (3) ta được $y = 1$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 1)$	0.25
	b), Cho a, b là các số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2 + b^2 - 2)(a + b)^2 + (1 - ab)^2 = -4ab$. Chứng minh rằng $\sqrt{1 + ab}$ là số hữu tỉ	2.0
	Ta có $(a^2 + b^2 - 2)(a + b)^2 + (1 - ab)^2 = -4ab$ $\Leftrightarrow [(a + b)^2 - 2(ab + 1)](a + b)^2 + (1 + ab)^2 = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow (a + b)^4 - 2(a + b)^2(1 + ab) + (1 + ab)^2 = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow [(a + b)^2 - (1 + ab)]^2 = 0 \Rightarrow (a + b)^2 - (1 + ab) = 0 \Leftrightarrow (a + b)^2 = 1 + ab$	0.5
	$\Leftrightarrow a + b = \sqrt{1 + ab}$ Vì $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Q}$ nên $\sqrt{1 + ab} \in \mathbb{Q}$ (ĐPCM)	0.5
Câu 4 2,0 điểm	Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm bất kì trên cạnh CD (E khác C, D). Đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F, đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K. Chứng minh rằng: $\cos \widehat{AKE} = \sin \widehat{EKF} \cdot \cos \widehat{EFK} + \sin \widehat{EFK} \cdot \cos \widehat{EKF}$.	2.0
		

	Kẻ đường cao EH của $\triangle KEF$ Ta có $S_{KEF} = \frac{1}{2}KE.FC = \frac{1}{2}KE.EF.\cos\widehat{EFC} = \frac{1}{2}KE.EF.\cos\widehat{AKE}$ (Vì $\widehat{EFC} = \widehat{AKE}$)	0.5
	Lại có $S_{KEF} = \frac{1}{2}EH.KF = \frac{1}{2}EH.(KH + HF)$	0.5
	Suy ra $KE.EF.\cos\widehat{AKE} = eh.(KH + HF) \Leftrightarrow \cos\widehat{AKE} = \frac{EH.KH + EH.HF}{KE.EF}$	0.5
	$\Rightarrow \cos\widehat{AKE} = \frac{EH}{EF} \cdot \frac{KH}{EK} + \frac{EH}{KE} \cdot \frac{HF}{EF} = \sin\widehat{EFK}.\cos\widehat{EKF} + \sin\widehat{EKF}.\cos\widehat{EFK}$	0.5
Câu 5 4.0 Điểm	Cho $\triangle ABC$ không là tam giác cân, ngoại tiếp đường tròn $(I; R)$. Gọi H, K, N lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn $(I; R)$ với các cạnh BC, AC, AB. Đường thẳng AH cắt đường tròn $(I; R)$ tại P (P không trùng với H), Gọi Q là trung điểm của KN. Trên tia đối của tia IA lấy điểm M sao cho $IM > R$. Từ điểm M kẻ các tiếp tuyến MD, MJ với đường tròn $(I; R)$. Qua điểm I, vẽ đường thẳng vuông góc với đoạn thẳng IM cắt các tia MD, MJ theo thứ tự tại hai điểm E và F. a) Chứng minh rằng tứ giác PQIH nội tiếp. b) Tìm vị trí của điểm M sao cho diện tích $\triangle MEF$ nhỏ nhất.	2.0 2.0
		
	a), Nối P với N, H với N Xét $\triangle APN$ và $\triangle ANH$ có: $\widehat{ANP} = \widehat{AHN}$ (vì AN là tiếp tuyến) $\widehat{NAH}$ là góc chung $\Rightarrow \triangle APN \sim \triangle ANH (g - g) \Rightarrow \frac{AP}{AN} = \frac{AN}{AH} \Leftrightarrow AP.AH = AN^2$ (1)	0.5
	Theo giả thiết $AN \perp NI$ nên $\triangle ANI$ vuông tại N, Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau ta có A, I, Q thẳng hàng và $NQ \perp AI$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông $\triangle ANI$ ta có $AN^2 = AQ.AI$ (2)	0.5

	Từ (1) và (2) ta có $AP.AH = AQ.AI \Leftrightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AI}{AH}$.	0.5
	Xét $\triangle APQ$ và $\triangle AHI$ có: $\frac{AP}{AQ} = \frac{AI}{AH}$ $\widehat{HAI}$ là góc chung $\Rightarrow \triangle APQ \sim \triangle AHI$ (c - g - c) $\Rightarrow \widehat{AQP} = \widehat{AHI}$. Suy ra tứ giác PQIH nội tiếp.	0.5
		
	b), Vì $\triangle IME$ vuông tại I đường cao ID nên $DM.DE = ID^2 = R^2$ (không đổi)	0.5
	Lại có $ME = MD + DE \geq 2\sqrt{MD.DE} = 2\sqrt{R^2} = 2R$ (BĐT Cauchy) (1)	0.5
	Dấu “=” xảy ra khi $DM = DE \Leftrightarrow \triangle IME$ là tam giác vuông cân $\Leftrightarrow IM = ID\sqrt{2} = R\sqrt{2}$	0.25
	Mặt khác $S_{MEF} = 2.S_{MIE} = 2.\frac{1}{2}ID.ME = ID.ME = R.ME \geq 2R^2$ (theo (1))	0.5
	Vậy nếu $IM = R\sqrt{2}$ thì diện tích $\triangle MEF$ nhỏ nhất.	0.25
Câu 6 2,0 điểm	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1000$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a}{b^4 + c^4 + 1000a} + \frac{b}{c^4 + a^4 + 1000b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + 1000c}$.	2.0
	Ta chứng minh bất đẳng thức $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ (*) Thật vậy: $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ $\Leftrightarrow (a - b)(a^3 - b^3) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0$	0.5

	$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right] \geq 0 \quad (\text{luôn đúng với mọi } a, b > 0)$ Dấu “ = ” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$	
	Áp dụng BĐT (*) ta có: $a^4 + b^4 + 1000c \geq ab(a^2 + b^2 + c \cdot abc) = ab(a^2 + b^2 + c^2) > 0 \quad \forall a, b, c > 0$ $\Rightarrow \frac{1}{a^4 + b^4 + 1000c} \leq \frac{1}{ab(a^2 + b^2 + c^2)}$ $\Leftrightarrow \frac{c}{a^2 + b^2 + 1000c} \leq \frac{c}{ab(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{c^2}{abc(a^2 + b^2 + c^2)}$	0.5
	Tương tự: $\frac{b}{a^4 + c^4 + 1000b} \leq \frac{b}{ac(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{b^2}{abc(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (2)$ Và $\frac{a}{b^4 + c^4 + 1000a} \leq \frac{a}{bc(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{a^2}{abc(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (3)$	0.5
	Cộng theo vế các BĐT (1), (2), (3) ta được $\frac{a}{b^4 + c^4 + 1000a} + \frac{b}{c^4 + a^4 + 1000b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + 1000c} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{1}{1000}$	0.25
	Dấu “ = ” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ abc = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 10.$ Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{1000}$ khi và chỉ khi $a = b = c = 10$	0.25

----- Hết -----